

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 11

Serie nona

1 Novembre 1951

Sul calcolo del più basso livello energetico dell'Ortoelio.

M. SIMONETTA e R. BONELLI

Istituto di Chimica generale del Politecnico - Milano

(ricevuto il 21 Luglio 1951)

Riassunto. — Il più basso livello energetico dell'Ortoelio è stato calcolato applicando il metodo variazionale alla funzione $1s_{Z'}(1)2s_{Z''}(2) - 2s_{Z''}(1)1s_{Z'}(2)$. È stato ottenuto il valore $E = -4,3322 R_{\text{He}}hc$, con $Z' = 1,991$, $Z'' = 1,497$.

Tra i più comuni e più utili metodi di approssimazione della quantomeccanica è il metodo variazionale ⁽¹⁾, basato sul fatto che l'integrale $E = \int \Phi^* H \Phi d\tau$ è un limite superiore per l'energia W_0 del più basso stato di un sistema qualunque. In questa espressione H è l'operatore hamiltoniano completo per il sistema in istudio e Φ è una qualsiasi funzione normalizzata delle coordinate del sistema soddisfacente alla solita condizione di essere finita, continua e ad un sol valore in tutti i punti dello spazio di configurazione del sistema. Per il resto la funzione Φ è completamente arbitraria: quanto meglio sarà stata fatta la sua scelta tanto più vicino all'energia W_0 sarà il valore così ottenuto per l'integrale E . Inoltre poichè se E è uguale a W_0 , Φ coincide con ψ_0 (funzione d'onda esatta per il sistema) è naturale pensare che se E è molto vicina a W_0 , allora Φ non differirà molto dalla funzione esatta ψ_0 . Il metodo variazionale può essere usato pertanto, oltrechè per ottenere valori approssimati dell'energia del sistema nel suo stato fondamentale, anche per ottenere funzioni d'onda

⁽¹⁾ C. ECKART: *Phys. Rev.*, **36**, 878 (1930).

approssimate. In casi in cui non sia conveniente normalizzare Φ le considerazioni precedenti rimangono valide purchè E sia dato dall'espressione

$$E = \frac{\int \Phi^* H \Phi d\tau}{\int \Phi^* \Phi d\tau}.$$

A volte il teorema $E \geq W_0$ può essere esteso a stati diversi da quello fondamentale. Un esempio tipico di tali casi si ha appunto nell'atomo di Elio, per il quale è possibile calcolare il livello energetico più basso sia del Paraelio che dell'Ortoelio. Infatti (trascurando le interazioni orbita-spin) le funzioni d'onda per il tripletto sono antisimmetriche nelle coordinate posizionali dei due elettroni e non contengono contributi da funzioni singoletto, che sono invece simmetriche rispetto a dette coordinate. Per l'Ortoelio HYLLERAAS ⁽²⁾ ha studiato la funzione

$$s \exp [-Z's] \sinh et, \quad (\text{dove } s = r_1 + r_2, \quad t = -r_1 + r_2)$$

ottenendo per l'energia il valore $-4,3420 R_{\text{He}}hc$, assai vicino a quello sperimentale $-3,3504 R_{\text{He}}hc$.

HYLLERAAS ha inoltre sostituito in quella funzione s con $s + c_1 u$ ottenendo una energia di $-4,3448 R_{\text{He}}hc$ e con $s + c_2 t^2$, ottenendo il valore $-4,3484 R_{\text{He}}hc$. È probabile che la serie $s + c_1 u + c_2 t^2$ conduca a risultati ancora più vicini all'esperienza. Peraltro PAULING e WILSON ⁽³⁾ hanno messo in evidenza come si presenti del massimo interesse la funzione

$$1s_{Z'}(1)2s_{Z''}(2) - 2s_{Z''}h(1)1s_{Z'}(2),$$

dove $1s_{Z'}$ e $2s_{Z''}$ sono funzioni idrogenoidi in cui le cariche nucleari effettive Z' e Z'' si possono prendere come parametri. Questa funzione, antisimmetrica negli elettroni 1 e 2, rispecchia l'idea fornitaci dalla spettroscopia dello stato normale dell'Ortoelio, con un elettrone nello stato $1s$ e un secondo elettrone nello stato $2s$, a spin paralleli. Il fatto che allo stato normale dell'Ortoelio vada attribuita una configurazione con un elettrone nello stato K ed uno nello stato L (così come la configurazione $(1s)^2$ allo stato fondamentale del Paraelio) è in accordo anche coi risultati ottenuti nel calcolo delle rispettive energie mediante l'uso delle costanti di schermo di SLATER ⁽⁴⁾: $-2(1,7)^2 = -5,78 R_{\text{He}}hc$ per il Paraelio (valore sperimentale $= -5,80$) e $-2^2 - (1,15/2)^2 = -4,33 R_{\text{He}}hc$ per l'Or-

⁽²⁾ E. R. HYLLERAAS: *Zeits. f. Phys.*, **54**, 437 (1929).

⁽³⁾ L. PAULING e E. B. WILSON: *Introduction to quantum mechanics* (Mc Graw Hill Book Comp., 1935).

⁽⁴⁾ J. C. SLATER: *Phys. Rev.*, **36**, 57 (1930).

toelio (valore sperimentale $= -4,35$). La funzione d'onda esplicita risulta:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi a_0^3} \sqrt{\frac{Z'^3 Z''^3}{2}} \left\{ \left(2 - \frac{Z'' r_2}{a_0} \right) \exp \left[-\frac{2Z' r_1 + Z'' r_2}{2a_0} \right] - \right. \\ \left. - \left(2 - \frac{Z'' r_1}{a_0} \right) \exp \left[-\frac{2Z' r_2 + Z'' r_1}{2a_0} \right] \right\}.$$

L'hamiltoniano per il nostro sistema è

$$H = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - Ze^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{e^2}{r_{12}},$$

con $Z = 2$ (∇_1^2 e ∇_2^2 in coordinate polari). Poichè la Φ non è normalizzata si tratta di minimizzare rispetto ai parametri variabili Z' e Z'' , l'espressione:

$$E = \frac{\int \Phi^* H \Phi d\tau}{\int \Phi^* \Phi d\tau} = \frac{M}{N},$$

dove l'elemento di volume $d\tau$ è dato da

$$d\tau = r_1^2 dr_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1 r_2^2 dr_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2.$$

L'integrale sestuplo va esteso per entrambi gli elettroni a tutto lo spazio. I calcoli dei vari integrali necessari sono laboriosi ma non presentano in sostanza nessuna speciale particolarità, per cui riportiamo direttamente i risultati:

$$M = \frac{e^2}{a_0} \left\{ 0,5 Z'' - Z''^3 (2Z' + Z'')^{-2} - 2Z' Z''^3 (2Z' + Z'')^{-3} + 2Z''^4 (2Z' + Z'')^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} Z''^5 (2Z' + Z'')^{-4} + 6Z' Z''^4 (2Z' + Z'')^{-4} - 6Z' Z''^5 (2Z' + Z'')^{-5} - \right. \\ \left. - 160 Z'^3 Z''^3 (2Z' + Z'')^{-5} + 800 Z'^3 Z''^4 (2Z' + Z'')^{-6} - 1056 Z'^3 Z''^5 (2Z' + Z'')^{-7} \right\} + \\ + \frac{4\hbar^2}{m_0 \tau^2 a_0^2} \left\{ \frac{Z'^2}{16} + \frac{Z''^2}{64} + Z'^3 Z''^3 (2Z' + Z'')^{-6} (80 Z' Z'' + 32 Z'^2 + 88 Z''^2) - \right. \\ \left. - 192 Z'^3 Z''^3 \left(Z'^2 Z'' + \frac{3}{4} Z''^3 + \frac{Z' Z''^2}{2} \right) (2Z' + Z'')^{-7} + 288 Z'^3 Z''^5 \left(Z'^2 + \frac{Z''^2}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times (2Z' + Z'')^{-8} - 16 Z'^3 Z''^3 (Z' + Z'') (2Z' + Z'')^{-5} \right\} - \frac{e^2}{a_0} \left\{ Z'' + 4Z' + 5120 Z''^4 Z'^3 \times \right. \\ \left. \times (2Z' + Z'')^{-6} - 1024 Z'^3 Z''^3 (2Z' + Z'')^{-5} - 6144 Z''^5 Z'^3 (2Z' + Z'')^{-7} \right\}, \\ N = 2 \left\{ 1 - 512 \frac{Z'^3 Z''^3}{(2Z' + Z'')^6} + 3072 \frac{Z'^3 Z''^4}{(2Z' + Z'')^7} - 4608 \frac{Z'^3 Z''^5}{(2Z' + Z'')^8} \right\}.$$

Il valore della frazione M/N è stato minimizzato rispetto ai parametri Z'' e $\varrho = Z'/Z''$. È stato seguito il metodo già usato da WEINBAUM ⁽⁵⁾ nel suo studio della molecola di Idrogeno. La condizione $(\partial E / \partial Z'')_{\varrho} = 0$ ha portato alla semplice equazione algebrica:

$$Z''^2 \left\{ 2\varrho^2 + \frac{1}{2} - 512(\varrho^4 + \varrho^2)(2\varrho + 1)^{-5} + (2560\varrho^4 + 1024\varrho^5 + 2816\varrho^3) \times \right. \\ \times (2\varrho + 1)^{-6} - (6144\varrho^5 + 4608\varrho^3 + 3022\varrho^4)(2\varrho + 1)^{-7} + \\ \left. + (9216\varrho^5 + 2304\varrho^3)(2\varrho + 1)^{-8} \right\} + \{ -(2\varrho + 1) - 2(2\varrho + 1)^{-2} - \\ - 4(\varrho - 1)(2\varrho + 1)^{-3} + (12\varrho - 3)(2\varrho + 1)^{-4} + (-12\varrho + 1728\varrho^3) \times \\ \times (2\varrho + 1)^{-5} - 8640\varrho^3(2\varrho + 1)^{-6} + 10176\varrho^3(2\varrho + 1)^{-7} \} = 0.$$

La $\partial E / \partial \varrho_{Z''} = 0$ purtroppo non è riducibile a forma semplice e ha dovuto esser risolta di volta in volta per via grafica. Assegnati ai due parametri la coppia di valori $Z' = 1$ e $\varrho = 2$, la $(\partial E / \partial Z'')_{\varrho} = 0$ per $\varrho = 2$ permette di calcolare un primo valore approssimato di Z'' e di E . La risoluzione dell'equazione $(\partial E / \partial \varrho)_{Z''} = 0$ per il valore così ottenuto di Z'' permette di calcolare il nuovo valore di ϱ e così via. Applicando successivamente questo metodo si arriva alla fine al risultato:

$$E = -4,3322 R_{\text{He}} h c.$$

$$Z' = 1,991$$

$$Z'' = 1,497.$$

Detto valore, se pur non è altrettanto vicino a quello sperimentale che il valore calcolato da HYLLEAAS, è tuttavia ottimo ed è stato ottenuto usando una semplice funzione il cui significato fisico è immediato, e tale da classificare lo stato energetico più basso dell'Ortoelio come stato 2^3S_1 .

(5) S. WEINBAUM: *Journ. Chem. Phys.*, **1**, 593 (1933).

SUMMARY

The energy of the lowest triplet state of helium has been evaluated using the variation function: $1s_{Z'}(1)2s_{Z''}(2) - 2s_{Z''}(1)1s_{Z'}(2)$. The energy value obtained is $-4.3322 R_{\text{He}} h c$, for $Z' = 1.991$ and $Z'' = 1.497$.

On the General Theory of Damping in Quantum Mechanics.

M. SCHÖNBERG

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 30 Luglio 1951)

Summary. — A general form of the equation of HEITLER and PENG, valid for time dependent interactions, is given. The relations between the generalized Heitler-Peng and Schwinger theories of damping are examined in detail. A form of the damping theory given previously by the author is generalized to the case of any time independent interaction. It is shown that the generalized form of the Heitler-Peng treatment of the damping may be used to develop a form of stationary perturbation theory applicable to cases in which it is not possible to set up a correspondence between unperturbed and perturbed stationary states.

Introduction.

1. — The first problems of damping treated in quantum theory were those of emission and scattering of light by atoms in discrete levels, solved by WEISSKOPF and WIGNER ⁽¹⁾. Later, another type of damping problem, in which only continuous levels do come in, was treated in particular cases by several authors ⁽²⁾, and a general formalism for this kind of problems was developed by HEITLER and PENG ⁽³⁾ and perfected by PAULI ⁽⁴⁾. HEITLER and MA ⁽⁵⁾ and HAMILTON ⁽⁶⁾ have shown that the methods used for con-

⁽¹⁾ V. WEISSKOPF and E. WIGNER: *Zeits. f. Phys.*, **63**, 54 (1930); **65**, 18 (1930).

⁽²⁾ A. H. WILSON: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **37**, 301 (1941); W. HEITLER: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **37**, 291 (1941); A. SOKOLOV: *Journ. Phys. U.R.S.S.*, **5**, 231 (1941); E. GORA: *Zeits. f. Phys.*, **120**, 121 (1943).

⁽³⁾ W. HEITLER and H. W. PENG: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **38**, 296 (1942).

⁽⁴⁾ W. PAULI: *Meson Theory of Nuclear Forces*, (New York, 1946), p. 41.

⁽⁵⁾ W. HEITLER and S. T. MA: *Proc. Roy. Irish Acad.*, **52A**, 109 (1949).

⁽⁶⁾ J. HAMILTON: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 12 (1949).

tinuous levels can be generalized to the case of any kind of level. Recently a treatment of damping in a relativistic covariant form was given by FUKUDA and MIYAZIMA ⁽⁷⁾ using Schwinger's theory of collisions ⁽⁸⁾. We have derived ⁽⁹⁾ an integral equation for the theory of damping, which can be applied both to continuous and discrete levels, from a special treatment of the quantum theory of perturbations. In this paper, we shall discuss the general theory of damping in quantum mechanics as an application of the resolvent operators, using also the generalized definition of the resolvent operator introduced in a previous paper ⁽¹⁰⁾, and we shall examine in detail the relations between the different points of view of the aforementioned authors.

The resolvent operators $(H - \lambda)^{-1}$ attached to hermitian operators H , λ being a complex parameter, play a central part in the theory of linear transformations in Hilbert space ⁽¹¹⁾ and are the most adequate tool to treat many problems in quantum theory, as we have indicated in a previous paper ⁽¹⁰⁾. It will be shown in this paper that the resolvent operators lead to a very simple and general theory of damping, especially when the generalized resolvents of reference ⁽¹⁰⁾ are used. The damping theory deals with effects associated to long intervals of time, which can not be treated conveniently by the usual methods of perturbation theory, because in these methods the evolution of the system is described by series expansions of the wave function which represent the finite evolution of the system as an accumulation of infinitesimal steps. The natural approach to the damping theory is given by formalisms in which the integrated motion over a long interval of time is treated directly, as it is done in the theories of HEITLER and MA ⁽⁵⁾ and HEITLER and PENG ⁽³⁾, as well as in those of SCHWINGER ⁽⁸⁾, FUKUDA and MIYAZIMA ⁽⁷⁾ and SCHÖNBERG ⁽⁹⁾. The ordinary resolvents $(H - \lambda)^{-1}$ allow to develop in a very simple way a treatment related to that of HEITLER and MA ⁽⁵⁾, with the advantage of using a simpler integral equation, which is moreover the natural generalization of the equation of HEITLER and PENG ⁽³⁾. The generalized resolvents of reference ⁽¹⁰⁾ lead to a treatment of the damping as general as that of SCHWINGER ⁽⁸⁾ and FUKUDA and MIYAZIMA ⁽⁷⁾, in a way which may be considered as the generalization of the method of HEITLER and PENG ⁽³⁾.

The main properties of the resolvent operators are discussed in section 2. The generalization of the equation of Heitler and Peng for any kind of time independent hamiltonians (both discrete and continuous levels) is given in section 4. In section 5 the equation of Heitler and Peng is extended to the

⁽⁷⁾ N. FUKUDA and T. MIYAZIMA: *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 849 (1950).

⁽⁸⁾ J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).

⁽⁹⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 403 (1951).

⁽¹⁰⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 651 (1951).

⁽¹¹⁾ M. H. STONE: *Linear Transformations in Hilbert Space* (New York, 1932).

case of a time independent unperturbed hamiltonian with a time dependent perturbation, starting from the integral equation for the generalized resolvents which we have derived ⁽¹⁰⁾. The treatment of the time dependent perturbations involves linear transformations of operators which can be conveniently handled by the introduction of super-operators (SCHÖNBERG ⁽¹²⁾). The iteration methods of damping theory are replaced by expansions of operators and super-operators in Liouville-Neumann series, analogous to geometrical series. It is shown that the elimination of virtual transitions by the iteration methods amounts to the determination of a certain kind of solutions of the perturbed Schrödinger equation, which do not satisfy the boundary conditions for scattering. The integral equation which generalizes the Heitler-Peng equation is essentially a relation between the satisfactory wave-function and that obtained by the elimination of the virtual transitions.

In section 5 is introduced a width operator which describes the shift and the broadening of the unperturbed levels by the perturbation. It is shown in section 6 that our definition of the widths is equivalent to that given by HEITLER and MA ⁽⁵⁾, and their integral equation is derived from the theory of the resolvent. The different quantities appearing in the treatment of Heitler and Ma can be easily expressed in terms of the ordinary resolvents.

An alternative treatment of the damping, not involving the resolvent operators, is given in sections 7, 8 and 9. This treatment leads to the formalism of SCHWINGER ⁽⁸⁾ and FUKUDA and MIYAZIMA ⁽⁷⁾, and it shows clearly the relations between this theory and the older forms of the damping theory. It is shown that the passage from the generalized Heitler-Peng formalism to that of Schwinger and Fukuda and Miyazima can be performed simply by a Fourier transformation. This treatment is more general than that of section 4, because it is valid even in the case of a time dependent unperturbed hamiltonian with a time dependent perturbation. SCHWINGER ⁽⁸⁾ expressed the Heisenberg collision operator S in terms of an hermitian operator K (the reaction operator) by a Cayley transformation and introduced an integral equation which leads to an expansion in series of the reaction operator K ; the collision operator S is then determined by an integral equation involving the reaction operator K . It is shown that the determination of the reaction operator K corresponds to the determination of the auxiliary perturbed wave function in the generalization of the Heitler-Peng treatment.

The integral equation for the damping, including self-energy corrections, given in reference ⁽⁹⁾ is derived from the formalism of the resolvent operators in section 10. This derivation has the same limitations as the original one ⁽⁹⁾, which is based on the assumption that it is possible to go over from the un-

⁽¹²⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 241 (1951).

perturbed eigenstates to the perturbed ones by a rotation in the space of the states of the dynamical system in consideration. In the case of systems with continuous levels, the perturbation methods of reference (9) do not allow to determine completely the rotation in the state space and this leaves an arbitrariness in the definition of the self-energies of the states of the continuum. By using the width operator introduced in section 5, it is possible to get rid of the indetermination in the correspondance between perturbed and unperturbed levels of the continuum and also to treat cases in which it is not possible to establish a correspondance between perturbed and unperturbed levels.

In the generalized form of the Heitler-Peng theory of the damping given in this paper, the essential objective is the determination of the resolvent operator for the perturbed hamiltonian. Once the resolvent is determined, the spectral decomposition of the perturbed hamiltonian may be considered as obtained, in particular its discrete levels are the poles of the resolvent. Thus our treatment of the damping can be used to develop a form of perturbation theory in which a correspondance between unperturbed and perturbed eigenstates plays no part at all and which can be applied to problems in which discrete levels are created by the perturbation. This form of perturbation theory allows to get unambiguously the shift of the levels of the continuum, as it is shown in this paper. The detailed treatment of the perturbation theory based on the resolvent will be given elsewhere.

General properties of the resolvents.

2. - We shall consider dynamical systems whose hamiltonians $H(t)$ will in general be time dependent, although some of the most important problems lead to time independent hamiltonians. $H(t)$ will be called the perturbed hamiltonian, it is the sum of the unperturbed hamiltonian $H_0(t)$ and of the perturbation $H'(t)$

$$(1) \quad H(t) = H_0(t) + H'(t).$$

The contact transformation generated by the movement during the time interval $t' - t$ will be described by the unitary operator $V(t, t')$ defined by the equations

$$(2) \quad i \frac{d}{dt} V(t, t') = H(t) V(t, t'), \quad V(t', t') = 1; \quad (\hbar = 1).$$

$V(t, t')$ transforms the state $\psi(t')$ at the time t' into the state $\psi(t)$ at the time t

$$(3) \quad \psi(t) = V(t, t') \psi(t'),$$

the ψ being vectors in a convenient functional space. The state $\psi(t)$ is de-

terminated by the Schrödinger equation

$$(4) \quad i \frac{d}{dt} \psi(t) = H(t)\psi(t),$$

and its initial value $\psi(t')$.

We may treat t as a parameter and consider $V(t, t')$ as a function of t' determined by the equations

$$(5) \quad -i \frac{d}{dt'} V(t, t') = V(t, t') H(t'), \quad V(t, t) = 1.$$

The contact transformation generated by $H_0(t)$ will be denoted by $V_0(t, t')$

$$(6) \quad i \frac{d}{dt} V_0(t, t') = H_0(t) V_0(t, t'), \quad V_0(t', t') = 1.$$

In the important particular case of a time independent H_0 , the operator $V_0(t, t')$ depends only on the difference $t - t'$

$$(7) \quad V_0(t, t') = \exp [-i(t - t')H_0].$$

It is convenient to introduce a special notation for $V_0(t, 0)$

$$(8) \quad V_0(t) = V_0(t, 0).$$

The resolvent operator R is defined by means of the $\bar{R}_{\pm}(\lambda, t')$

$$(9a) \quad \bar{R}_+(\lambda, t') = i \int_{t'}^{\infty} \exp [i\lambda t] V(t, t') dt \quad \text{Im} \lambda > A_+,$$

$$(9b) \quad \bar{R}_-(\lambda, t') = -i \int_{-\infty}^{t'} \exp [i\lambda t] V(t, t') dt \quad \text{Im} \lambda < A_-.$$

We shall assume that the convergence limits A_+ and A_- satisfy the following conditions

$$(10) \quad A_+ < +\infty, \quad A_- > -\infty,$$

and we shall take

$$(11a) \quad R(\lambda, t') = \exp [-i\lambda t'] \bar{R}_+(\lambda, t') \quad \text{Im} \lambda > A_+,$$

$$(11b) \quad R(\lambda, t') = \exp [-i\lambda t'] \bar{R}_-(\lambda, t') \quad \text{Im} \lambda < A_-.$$

When

$$(12) \quad A_+ \leq 0, \quad A_- \geq 0,$$

it is possible to define $\bar{R}_{\pm}(\lambda, t')$ and $R(\lambda, t')$ for real values of λ . The Fourier

transform of $V(t, t')$ will be denoted by $F(\omega, t')$

$$(13) \quad V(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\omega t] F(\omega, t') d\omega.$$

It results from equations (9) that

$$(14a) \quad V(t, t')\eta(t-t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \exp[-i\lambda t] \bar{R}_+(\lambda, t') d\lambda, \quad (\alpha > A_+),$$

$$(14b) \quad V(t, t')\eta(t'-t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{+\infty+i\beta} \exp[-i\lambda t] \bar{R}_-(\lambda, t') d\lambda, \quad (\beta < A_-),$$

with

$$(15) \quad \eta(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 1/2 & u = 0 \\ 0 & u < 0. \end{cases}$$

Hence, at the points of the real axis where it is possible to define the \bar{R}_{\pm}

$$(16) \quad \bar{R}_+(\omega, t') - \bar{R}_-(\omega, t') = 2\pi i F(\omega, t'),$$

and the resolvent is discontinuous at these points

$$(17) \quad R(\omega + i0, t') - R(\omega - i0, t') = 2\pi i F(\omega, t') \exp[-i\omega t'],$$

unless the Fourier coefficient F vanishes for the corresponding circular frequencies.

In the case of a time independent H

$$(18) \quad R(\lambda, t') = (H - \lambda)^{-1} = R(\lambda), \quad (Im \lambda \neq 0)$$

so that our generalized resolvent goes over into the ordinary resolvent $R(\lambda)$. The resolvent is now regular at the points of the real axis which do not belong to the spectrum of H , and it has simple poles at the discrete eigenvalues of H . At the points which belong to the continuous spectrum of H the resolvent is discontinuous. All these properties follow immediately from (17) and the spectral decomposition of H and $V(t, t')$

$$(19) \quad H = \sum_{k, \alpha} P_{k, \alpha} E_k + \int_{sp.} P(E) E dE$$

$$(20) \quad V(t, t') = \exp[-i(t-t')H] = \sum_{k, \alpha} P_{k, \alpha} \exp[-i(t-t')E_k] + \int_{sp.} P(E) \exp[-i(t-t')E] dE.$$

the $P_{k,\alpha}$ being the projection operators corresponding to the discrete eigenstates $\Phi_{k,\alpha}$ and the $P(E)$ being the projection operators on the linear variety of the functional space corresponding to the eigenstates $\Phi_{E,\theta}$ of energy E

$$(21) \quad \begin{cases} P_{k,\alpha} \Phi = (\Phi_{k,\alpha}, \Phi) \Phi_{k,\alpha} & (\Phi_{k,\alpha}, \Phi_{k',\alpha'}) = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \\ P(E) \Phi = \int (\Phi_{E,\theta}, \Phi) \Phi_{E,\theta} d\theta, & (\Phi_{E,\theta}, \Phi_{E',\theta'}) = \delta(E - E') \delta(\theta - \theta'). \end{cases}$$

A more detailed discussion of the case of a time independent H is given in reference 10. In the case in consideration, it is convenient to introduce the operators $R_{\pm}(\lambda)$. $R_+(\lambda)$ is defined in the upper part of the complex λ -plane by the equation.

$$(22a) \quad R_+(\lambda) = R(\lambda), \quad (Im\lambda > 0),$$

and prolonged by analytical continuation to the lower part of the λ -plane across the continuous spectrum of H . $R_-(\lambda)$ is taken as $R(\lambda)$ in the lower part of the λ -plane

$$(22b) \quad R_-(\lambda) = R(\lambda), \quad (Im\lambda < 0),$$

and prolonged by analytical continuation to the upper part of the λ -plane across the continuous spectrum of H . $R(\lambda)$ is actually a branch of a multiple valued operator, isolated by a cut along the continuous spectrum of H . We get from (16) and (22)

$$(23) \quad R_+(\lambda) - R_-(\lambda) = 2\pi i P(\lambda).$$

We shall denote by $\bar{R}_{\pm,0}(\lambda, t')$ and $R_0(\lambda, t')$ the operators \bar{R}_{\pm} and R corresponding to the unperturbed hamiltonian $H_0(t)$. In the case of a time independent H_0 , we shall also consider the $R_{\pm,0}(\lambda)$ and $R_0(\lambda)$.

Generalization of the equation of Heitler and Peng.

3. - We shall consider first the case of a time independent unperturbed hamiltonian H_0 and a time independent perturbation H' . It follows from the definition (18) of $R(\lambda)$ that

$$(24) \quad (H - \lambda)R(\lambda) = [(H_0 - \lambda) + H']R(\lambda) = 1,$$

hence

$$(25) \quad (H_0 - \lambda)R(\lambda) = 1 - H'R(\lambda),$$

and

$$(26) \quad R(\lambda) = R_0(\lambda)[1 - H'R(\lambda)],$$

so that

$$(27) \quad R_{\pm}(\lambda) = R_{\pm,0}(\lambda)[1 - H'R_{\pm}(\lambda)].$$

$R_{\pm,0}(\lambda)$ being the analogue of $R_{\pm}(\lambda)$ for the unperturbed hamiltonian H_0 . We shall introduce now the operator $R_{s,0}(\lambda)$

$$(28) \quad R_{s,0}(\lambda) = \frac{1}{2} [R_{+,0}(\lambda) + R_{-,0}(\lambda)].$$

Taking into account the analogue of (23) for H_0 , we get

$$(29) \quad R_{\pm,0}(\lambda) = R_{s,0}(\lambda) \pm i\pi P_0(\lambda),$$

$P_0(\lambda)$ being the analogue of $P(\lambda)$. Equation (27) can be written as

$$(30) \quad R_{\pm}(\lambda) = R_{\pm,0}(\lambda) - R_{s,0}(\lambda)H'R_{\pm}(\lambda) \mp i\pi P_0(\lambda)H'R_{\pm}(\lambda),$$

hence

$$(31) \quad [1 + R_{s,0}(\lambda)H']R_{\pm}(\lambda) = R_{\pm,0}(\lambda) \mp i\pi P_0(\lambda)H'R_{\pm}(\lambda),$$

and

$$(32) \quad R_{\pm}(\lambda) = [1 + R_{s,0}(\lambda)H']^{-1}R_{\pm,0}(\lambda) \mp i\pi[1 + R_{s,0}(\lambda)H']^{-1}P_0(\lambda)H'R_{\pm}(\lambda).$$

The operator $[1 + R_{s,0}(\lambda)H']^{-1}$ will be expanded in a Liouville-Neumann series

$$(33) \quad [1 + R_{s,0}(\lambda)H']^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(\lambda)H']^n,$$

so that

$$(34) \quad R_{\pm}(\lambda) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(\lambda)H']^n \right\} R_{\pm,0}(\lambda) \mp \\ \mp i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(\lambda)H']^n \right\} P_0(\lambda)H'R_{\pm}(\lambda).$$

In order to get a generalization of the integral equation of Heitler and Peng, we shall introduce the operator $U'(\lambda)$

$$(35) \quad U'(\lambda) = H'R_+(\lambda)(H_0 - \lambda).$$

It follows from (34) that $U'(\lambda)$ satisfies the equation

$$(36) \quad U'(\lambda) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [H'R_{s,0}(\lambda)]^n \right\} H' - \\ - i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [H'R_{s,0}(\lambda)]^n \right\} H'P_0(\lambda)U'(\lambda).$$

This equation may be considered as a generalization of the equation of HEITLER and PENG⁽³⁾. The Liouville-Neumann expansion (33) corresponds to the iteration procedure of Heitler and Peng, in the improved form due to PAULI⁽⁴⁾. We get from (36), for real values E of the parameter λ , an integral equation for the matrix elements $\langle E, \theta | U'(E) | E', \theta' \rangle$

$$(37) \quad \langle E, \theta | U'(E) | E', \theta' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle E, \theta | [H' R_{s,0}(E)]^n H' | E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int \langle E, \theta | \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [H' R_{s,0}(E)]^n H' | E, \theta'' \rangle \langle E, \theta'' | U'(E) | E', \theta' \rangle d\theta''.$$

We have shown⁽¹⁰⁾ that on the continuous spectrum of H_0

$$(38) \quad R_{s,0}(E) = \text{p.v. } (H_0 - E)^{-1},$$

p.v. $(H_0 - E)^{-1}$ being the operator defined by the following equations

$$(39a) \quad \text{p.v. } (H_0 - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} \quad (E \text{ not belonging to the spectrum of } H_0),$$

$$(39b) \quad \text{p.v. } (H_0 - E_{0,i})^{-1} = \sum_{i' \neq i} P_{0,i'}(E_{0,i'} - E_{0,i})^{-1} + \\ + \int_{\text{sp.}} P_0(E')(E' - E_{0,i})^{-1} dE' \quad (E_{0,i} \text{ being a discrete eigenvalue of } H_0),$$

$$(39c) \quad \text{p.v. } (H_0 - E_0)^{-1} = \sum_{i'} P_{0,i'}(E_{0,i'} - E_0)^{-1} + \\ + \text{p.v. } \int_{\text{sp.}} P_0(E')(E' - E_0)^{-1} dE' \quad (E_0 \text{ belonging to the cont. spectrum of } H_0).$$

In order to get the physical meaning of equation (34), let us take into account that

$$(40) \quad (H_0 - \lambda) R_{s,0}(\lambda) = 1,$$

hence

$$(41) \quad (H_0 - \lambda) [R_{s,0}(\lambda) H']^n = H' [R_{s,0}(\lambda) H']^{n-1},$$

so that we have

$$(42) \quad (H_0 - \lambda) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(\lambda) H']^n \right\} = -H' \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(\lambda) H']^n \right\} + (H_0 - \lambda).$$

Let E be a real number included in the continuous spectra of H and H_0 , and

$\Phi_E^{(0)}$ an eigenstate of H_0 corresponding to the eigenvalue E . It follows from (42) that the operator $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(E)H']^n$ transforms $\Phi_E^{(0)}$ into an eigenstate of H

$$(43) \quad (H - E) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(E)H']^n \right\} \Phi_E^{(0)} = 0.$$

These eigenfunctions of H have already been discussed in reference (9). In a collision problem $\Phi_E^{(0)}$ can be taken as the eigenstate of the incoming free particles. It was shown in reference (9) that $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [R_{s,0}(E)H']^n \Phi_E^{(0)}$ does not satisfy the correct boundary conditions for scattering. It results from the preceding considerations that the first step of the Heitler-Peng theory of damping consists in the determination of an unsatisfactory perturbed eigenfunction by means of an expansion in series, the second step consisting in the determination of the satisfactory eigenfunction by means of an integral equation involving the unsatisfactory one.

Equation (34) may be considered as the fundamental equation of the damping theory, instead of the more complicated equation (36). We see that the integral equation of the damping theory, in the Heitler-Peng form, is essentially an equation for the determination of the branch R_+ of the resolvent. This point of view shows an interesting relation between the theory of damping and the form of the theory of collisions developed by SOMMERFELD (13) and MEIXNER (14), first indicated in reference (10): The matrix elements of R_+ are Green functions of the stationary Schrödinger equation. This results at once from the relation

$$(44) \quad (H - E)R_+(E) = 1,$$

by taking the matrix elements of both sides

$$(45) \quad \int \langle E', \theta' | H - E | E'', \theta'' \rangle \langle E'', \theta'' | R_+(E) | E'', \theta'' \rangle dE'' d\theta'' = \\ = \delta(E' - E'') \delta(\theta' - \theta'').$$

4. - We shall now discuss the case of a time dependent perturbation, using the generalized resolvents. In reference (10) we have given an integral equation

(13) A. SOMMERFELD: *Ann. d. Phys.*, **11**, 257 (1931).

(14) J. MEIXNER: *Math. Zeits.*, **36**, 677 (1933); *Zeits. f. Phys.*, **90**, 312 (1934); *Ann. d. Phys.*, **29**, 97 (1937).

for the operators $\bar{R}_{\pm}(\lambda, t')$

$$(46a) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) \bar{R}_{+}(\lambda - \omega, t') d\omega - \lambda \bar{R}_{+}(\lambda, t') = \exp [i\lambda t'], \quad (Im\lambda > 0),$$

$$(46b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) \bar{R}_{-}(\lambda - \omega, t') d\omega - \lambda \bar{R}_{-}(\lambda, t') = \exp [i\lambda t'], \quad (Im\lambda < 0),$$

with

$$(47) \quad L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i\omega t] H(t) dt.$$

In the case of a time independent H_0 we have

$$(48) \quad L(\omega) = H_0 \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i\omega t] H'(t) dt = H_0 \delta(\omega) + L'(\omega),$$

and equations (46) can be written as

$$(49) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = \bar{R}_{\pm,0}(\lambda) \left[\exp [i\lambda t'] - \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) \bar{R}_{\pm}(\lambda - \omega, t') d\omega \right].$$

This equation is a generalization of (27). In order to derive the damping equation, we shall introduce a super-operator \mathcal{R} which transforms any operator $C(\lambda)$ into another

$$(50) \quad \mathcal{R} \cdot C(\lambda) = R_{s,0}(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) C(\lambda - \omega) d\omega.$$

Equation (49) can be easily transformed into the following one

$$(51) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = Z_{\pm}(\lambda, t') - \mathcal{R} \cdot \bar{R}_{\pm}(\lambda, t'),$$

with

$$(52) \quad Z_{\pm}(\lambda, t') = R_{\pm,0}(\lambda) \exp [i\lambda t'] \mp i\pi P_0(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) \bar{R}_{\pm}(\lambda - \omega, t') d\omega.$$

We get from (51)

$$(53) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = [1 + \mathcal{R}]^{-1} \cdot Z_{\pm}(\lambda, t').$$

We shall assume that the super-operator $[1 + \mathcal{R}]^{-1}$ can be expanded into

for a Liouville-Neumann series

$$(54) \quad [1 + \mathcal{K}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{K}^n.$$

Introducing into (53) the expression (52) of $Z_{\pm}(\lambda, t')$, we get the generalization of equation (34)

$$(55) \quad \bar{R}_{\pm}(\lambda, t') = [1 + \mathcal{K}]^{-1} \cdot \bar{R}_{\pm,0}(\lambda, t') \mp \\ \mp i\pi [1 + \mathcal{K}]^{-1} \cdot P_0(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) \bar{R}_{\pm}(\lambda - \omega, t') d\omega.$$

In the case of a time independent H' we have

$$(56) \quad \begin{cases} L'(\omega) = H' \delta(\omega), & \mathcal{K} \cdot C(\lambda) = R_{s,0}(\lambda) H' C(\lambda) \\ [1 + \mathcal{K}]^{-1} \cdot C(\lambda) = [1 + R_{s,0}(\lambda) H']^{-1} C(\lambda). \end{cases}$$

The width operator $\Gamma_+(\lambda)$.

5. - In order to define the width of an unperturbed state we shall need a definition of the diagonal part of an operator A with respect to H_0 . The definition of the diagonal part A_d is quite simple in the case in which H_0 has a purely discrete spectrum, but it presents certain difficulties when there are continuous levels. We shall use the following general definition of A_d given in reference 9

$$(57) \quad A_d = A - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iH_0\tau] [A, H_0] \exp [-iH_0\tau] \frac{\tau}{|\tau|} d\tau.$$

It is easily seen that

$$(58) \quad A_d = \sum_i P_i^{(0)} A P_i^{(0)} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\text{sp.}} dE \int_{\text{sp.}} dE' P_0(E) A P_0(E') \cos [(E - E')\tau],$$

by taking into account the spectral decomposition of H_0 and $\exp [iH_0\tau]$,

$$(59) \quad H_0 = \sum_i P_i^{(0)} E_i^{(0)} + \int_{\text{sp.}} P_0(E) E dE,$$

$$(60) \quad \exp [iH_0\tau] = \sum_i P_i^{(0)} \exp [iE_i^{(0)}\tau] + \int_{\text{sp.}} P_0(E) \exp [iE\tau] dE.$$

The difference between A and A_d will be called the non diagonal part of A

and denoted by $A_{n.d.}$,

$$(61) \quad A = A_d + A_{n.d.}$$

We shall put

$$(62) \quad R_+(\lambda)_d = \left[H_0 - \lambda - \frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda) \right]^{-1}.$$

It follows from (14a) that

$$(63) \quad \eta(t-t') V(t, t')_d = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{\exp[-i\lambda(t-t')] d\lambda}{H_0 - \lambda - \frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda)},$$

hence

$$(64) \quad \langle l | V(t, t') | l \rangle \eta(t-t') = \langle l | V(t, t')_d | l \rangle \eta(t-t') = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \frac{\exp[-i\lambda(t-t')] d\lambda}{E_l^{(0)} - \lambda - \frac{i}{2} \langle l | \Gamma_+(\lambda) | l \rangle}.$$

The integral in (64) can be evaluated by residues, closing the integration path with a half-circle at infinity in the lower part of the λ -plane. We shall assume that there is a single pole ε_l defined by the equation

$$(65) \quad \varepsilon_l = E_l^{(0)} - \frac{i}{2} \langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle.$$

Thus we get

$$(66) \quad \langle l | V(t, t') | l \rangle \eta(t-t') = \exp[-iE_l^{(0)}(t-t')] \exp\left[-\frac{1}{2}(t-t') \langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle\right].$$

The real part of $\langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle$ is the width of the unperturbed level. The imaginary part of $1/2 \langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle$ gives the displacement of the unperturbed level due to the perturbation H' . $\Gamma_+(\lambda)$ will be called the width operator.

We shall consider now the non diagonal part of $R_+(\lambda)$. It follows from (27) that

$$(67) \quad R_+(\lambda)_{n.d.} = -R_{+,0}(\lambda)[H'R_+(\lambda)]_{n.d.}.$$

It is convenient to introduce the operator $U(\lambda)$

$$(68) \quad U(\lambda) = [H'R_+(\lambda)]_{n.d.} \left(H_0 - \lambda - \frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda) \right).$$

Equation (67) can be written as

$$(69) \quad R_+(\lambda)_{\text{n.d.}} = -R_{+,0}(\lambda)U(\lambda)R_+(\lambda)_{\text{d.}}.$$

It follows from (14a) that

$$(70) \quad \eta(t-t')V(t, t')_{\text{n.d.}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \exp[-i\lambda(t-t')]R_+(\lambda)_{\text{n.d.}} d\lambda,$$

hence

$$(71) \quad \eta(t-t')V(t, t')_{\text{n.d.}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} R_{+,0}(\lambda)U(\lambda) \frac{\exp[-i\lambda(t-t')] d\lambda}{H_0 - \lambda - \frac{i}{2}\Gamma_+(\lambda)},$$

so that we get by deformation of the integration path into the real axis

$$(72) \quad \eta(t-t') \langle l | V(t, t') | l' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{p.v.} (E_l^{(0)} - \lambda)^{-1} + i\pi \delta(E_l^{(0)} - \lambda)] \frac{\exp[-i\lambda(t-t')] \langle l | U(\lambda) | l' \rangle}{\lambda - E_{l'}^{(0)} + \frac{i}{2} \langle l | \Gamma_+(\lambda) | l \rangle} d\lambda.$$

The formulae for the matrix elements of $V(t, t')$ that we have derived are essentially the same given by HEITLER and MA ⁽⁵⁾.

The diagonal part of an operator A with respect to an operator B does not commute necessarily with B , as it is easily seen by considering the diagonal part of a momentum p with respect to the corresponding coordinate q , which coincides with p . Therefore, we cannot be a priori sure that the matrix elements of $\Gamma_+(\lambda)$ are of the following form

$$(73) \quad \langle E, \theta | \Gamma_+(\lambda) | E', \theta' \rangle = G_+(\theta, \theta'; \lambda) \delta(E - E'),$$

as it would appear from an uncritical analogy with the case of an H_0 with a purely discrete spectrum.

The equation of Heitler and Ma.

6. - We shall now derive the equation of HEITLER and MA from our formalism. It follows from (69) that:

$$(74) \quad R_+(\lambda) = R_+(\lambda)_{\text{d.}} - R_{+,0}(\lambda)U(\lambda)R_+(\lambda)_{\text{d.}},$$

hence

$$(75) \quad H'R_+(\lambda) \left(H_0 - \lambda - \frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda) \right) = -H' - H'R_{+,0}(\lambda)U(\lambda).$$

Taking the non diagonal parts of both sides of (75), we get

$$(76) \quad U(\lambda) = H'_{n.d.} - [H'R_{+,0}(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.} = \\ = H'_{n.d.} - [H'R_{s,0}(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.} - i\pi[H'P_0(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.}.$$

Let us introduce the super-operator \mathcal{A} defined by the following equation

$$(77) \quad \mathcal{A} \cdot C(\lambda) = [H'R_{s,0}(\lambda)C(\lambda)]_{n.d.}.$$

We get from (76) and (77)

$$(78) \quad U(\lambda) + \mathcal{A} \cdot U(\lambda) = [H' - i\pi H'P_0(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.},$$

hence

$$(79) \quad U(\lambda) = [1 + \mathcal{A}]^{-1} \cdot [H' - i\pi H'P_0(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.}.$$

The equation of Heitler and Ma follows from (79) by expanding the super-operator $[1 + \mathcal{A}]^{-1}$ in a Liouville-Neumann series

$$(80) \quad U(\lambda) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{A}^n \right] \cdot H'_{n.d.} - i\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{A}^n \right] \cdot [H'P_0(\lambda)U(\lambda)]_{n.d.}.$$

The definition of $U(E)$ for real values of E which corresponds to the treatment of HEITLER and MA is given by the following equation

$$(81) \quad \omega(E) = U(E)[p.v. (H - E)^{-1} + i\pi P(E)]_{d.},$$

with

$$(82) \quad \omega(E) = - \int_0^{\infty} \exp[-i(H_0 - E)t] \frac{d}{dt} \{ \exp[iH_0 t] \exp[-iHt] \}_{n.d.} dt.$$

We shall replace E by a complex parameter λ and transform (82) by partial integration. Thus we get

$$(83) \quad \omega(\lambda) = -(H_0 - \lambda)R_+(\lambda)_{n.d.}, \quad (Im\lambda > 0).$$

The definition (81) of $U(E)$ can be extended to complex values of the parameter by taking

$$(84) \quad \omega(\lambda) = U(\lambda)R_+(\lambda)_{d.}.$$

It follows from (84) and (83) that

$$(85) \quad R_+(\lambda)_{n.d.} = -R_{+,0}(\lambda)U(\lambda)R_+(\lambda)_{d.}.$$

This equation coincides with (69), therefore the two definitions of $U(\lambda)$ are equivalent.

The definition of the width operator $\Gamma_+(\lambda)$ which corresponds to that given

by HEITLER and MA is the following one

$$(86) \quad -\frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda) = [H' - H' R_{+,0}(\lambda) U(\lambda)]_d.$$

In order to derive (86) we shall start from the equation

$$(87) \quad R_+(\lambda)_d = R_{+,0}(\lambda) - R_{+,0}(\lambda) [H' R_+(\lambda)]_d = \\ = R_{+,0}(\lambda) - R_{+,0}(\lambda) [H' - H' R_{+,0}(\lambda) U(\lambda)]_d R_+(\lambda)_d,$$

which follows from (26) and (69). It results from (87) that

$$(88) \quad R_+(\lambda)_d = \{ [H_0 - \lambda + H' - H' R_{+,0}(\lambda) U(\lambda)]_d \}^{-1},$$

hence

$$(89) \quad \left(H_0 - \lambda - \frac{i}{2} \Gamma_+(\lambda) \right) = [H_0 - \lambda + H' - H' R_{+,0}(\lambda) U(\lambda)]_d.$$

Equation (86) follows immediately from (89).

The preceding considerations show that the two operators U and Γ_+ can be defined easily in terms of the more fundamental one R_+ , and also that the equation of Heitler and Ma is a consequence of the equations satisfied by the resolvent, which are simpler.

Alternative treatment of the damping effects.

7. - We shall now discuss the damping with a different method, which will lead us to the theory of SCHWINGER⁽⁸⁾, FUKUDA and MIYAZIMA⁽⁷⁾. Let us introduce the operators $U_{\pm}(t, t')$ and $U_s(t, t')$

$$(90a) \quad U_+(t, t') = \eta(t - t') V(t, t')$$

$$(90b) \quad U_-(t, t') = -\eta(t' - t) V(t, t')$$

$$(90c) \quad U_s(t, t') = \frac{1}{2} [U_+(t, t') + U_-(t, t')].$$

The corresponding operators for the unperturbed hamiltonian will be denoted by $U_{\pm,0}(t, t')$ and $U_{s,0}(t, t')$.

It is easily seen that $V(t, t')$ satisfies the following integral equation

$$(91) \quad V(t, t') = V_0(t, t') - i \int_{t'}^t V_0(t, \tau) H'(\tau) V(\tau, t') d\tau.$$

By differentiating both sides of (91) with respect to t we get the first equa-

tion (2). The second equation (2) is also obviously satisfied by the solution of (91). From (91) follows an integral equation for $U_{\pm}(t, t')$.

$$(92) \quad U_{\pm}(t, t') = U_{\pm,0}(t, t') - i \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\pm,0}(t, \tau) H'(\tau) U_{\pm}(\tau, t') d\tau,$$

$$(93) \quad U_{\pm}(t, t') = U_{\pm,0}(t, t') \mp \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(t, \tau) H'(\tau) U_{\pm}(\tau, t') d\tau - \\ - i \int_{-\infty}^{+\infty} U_{s,0}(t, t') H'(\tau) U_{\pm}(\tau, t') d\tau,$$

hence

$$(94) \quad U_s(t, t') = U_{s,0}(t, t') - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(t, \tau) H'(\tau) V(\tau, t') d\tau - \\ - i \int_{-\infty}^{+\infty} U_{s,0}(t, t') H'(\tau) U_s(\tau, t') d\tau,$$

$U_{\pm}(t, t')$ and $U_s(t, t')$ satisfy the differential equation

$$(95) \quad i \frac{d}{dt} U(t, t') = H(t) U(t, t') - i \delta(t - t').$$

Let us introduce the super-operator \mathcal{U} defined by the following equation

$$(96) \quad \mathcal{U} \cdot C(t) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} U_{s,0}(t, \tau) H'(\tau) C(\tau) d\tau.$$

It follows from (93) that

$$(97) \quad U_{\pm}(t, t') = [1 - \mathcal{U}]^{-1} \cdot \left\{ U_{\pm,0}(t, t') \mp \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(t, \tau) H'(\tau) U_{\pm}(\tau, t') d\tau \right\},$$

hence

$$(98) \quad U_{\pm}(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}^n \cdot \left\{ U_{\pm,0}(t, t') \mp \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(t, \tau) H'(\tau) U_{\pm}(\tau, t') d\tau \right\}.$$

This equation is related to (34), because in the case of a time independent

hamiltonian

$$(99) \quad R_{\pm}(\lambda) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\lambda(t-t')] U_{\pm}(t, t') dt.$$

The decomposition of $U_{\pm,0}(t, t')$ into $U'_{s,0}(t, t')$ and $\pm i/2 V_0(t, t')$ corresponds to the decomposition of $R_{\pm,0}(\lambda)$ into $R_{s,0}(\lambda)$ and $\pm i\pi P_0(\lambda)$. The integral equation (98) is the fundamental equation in the present treatment of damping. It is interesting to notice that (98) is more general than both (34) and (55), since it is valid even when H_0 and H' depend on t .

8. - Let us consider the super-operator \mathcal{Q}

$$(100) \quad \mathcal{Q} \cdot C(t) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t-\tau) \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} C(\tau) d\tau.$$

$V_0(t)$ being the operator defined by (8) and

$$(101) \quad \varepsilon(t-\tau) = \frac{t-\tau}{|t-\tau|}.$$

Taking into account that

$$(102) \quad V_0(t, t') = V_0(t) V_0^{-1}(t'),$$

we get the following relation between \mathcal{U} and \mathcal{Q}

$$(103) \quad \mathcal{U} \cdot C(t) = V_0(t) \{ \mathcal{Q} \cdot V_0^{-1}(t) C(t) \}.$$

It follows from (103) that

$$(104) \quad \mathcal{U}^n \cdot C(t) = V_0(t) [\mathcal{Q}^n \cdot V_0^{-1}(t) C(t)],$$

hence

$$(105) \quad [1 - \mathcal{U}]^{-1} \cdot C(t) = V_0(t) \{ [1 - \mathcal{Q}]^{-1} \cdot V_0^{-1}(t) C(t) \}.$$

It follows from (97) that

$$(106) \quad V(t, t') = [1 - \mathcal{U}]^{-1} \cdot V_0(t, t') - \\ - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [1 - \mathcal{U}]^{-1} \cdot V_0(t, \tau) \} H'(\tau) V(\tau, t') \varepsilon(\tau - t') d\tau.$$

This equation can be taken as the integral equation of the damping, instead of (98). Let us introduce the operator $\bar{V}(t, t')$

$$(107) \quad \bar{V}(t, t') = [1 - \mathcal{U}]^{-1} \cdot V_0(t, t').$$

Equation (106) can be written as

$$(108) \quad V(t, t') = \bar{V}(t, t') - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(t, \tau) H'(\tau) V(\tau, t') \varepsilon(\tau - t') d\tau.$$

It follows from (105) that

$$(109) \quad \bar{V}(t, t') = V_0(t) \{ [1 - \mathcal{Q}]^{-1} \cdot V_0^{-1}(t) V_0(t) \} V_0^{-1}(t') = V_0(t) \bar{W}(t) V_0^{-1}(t'),$$

with

$$(110) \quad \bar{W}(t) = [1 - \mathcal{Q}]^{-1} \cdot 1(t),$$

$1(t)$ is the operator 1, with the indication that it is considered as a function of t . Taking into account the identity

$$(111) \quad [1 - \mathcal{Q}]^{-1} = 1 + \mathcal{Q}[1 - \mathcal{Q}]^{-1},$$

we see that $\bar{W}(t)$ is the solution of the integral equation of SCHWINGER ⁽⁸⁾

$$(112) \quad \bar{W}(t) = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t - \tau) \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} \bar{W}(\tau) d\tau.$$

Therefore $\bar{V}(t, t')$ is the solution of the integral equation

$$(113) \quad \bar{V}(t, t') = V_0(t, t') - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(t, \tau) H'(\tau) \bar{V}(\tau, t') \varepsilon(t - \tau) d\tau.$$

It follows from (113) that

$$(114) \quad i \frac{d}{dt} \bar{V}(t, t') = H(t) \bar{V}(t, t').$$

The preceding results show that, in the present treatment of the damping, a solution $\bar{V}(t, t')$ of the differential equation for $V(t, t')$ is obtained by an expansion in series and then $V(t, t')$ is determined as the solution of the integral equation (108), which involves $\bar{V}(t, t')$. There is a very close analogy with the procedure of HEITLER and PENG, in which the correct eigenfunction is determined by an integral equation involving an unsatisfactory wave function obtained by an expansion in series.

We have already obtained Schwinger's integral equation (112), (strictly speaking a more general one, since Schwinger considered only time independent hamiltonians), now we shall derive the fundamental equation of the damping treatment of FUKUDA and MIYAZIMA ⁽⁷⁾. Let us introduce the operator $W(t, t')$

$$(115) \quad V(t, t') = V_0(t) W(t, t') V_0^{-1}(t').$$

The Heisenberg collision operator S is $W(\infty, -\infty)$

$$(116) \quad S = W(\infty, -\infty).$$

From (91) we get an integral equation for $W(t, t')$

$$(117) \quad W(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, t') d\tau,$$

which can be transformed into

$$(118) \quad W(t, t') = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, t') \varepsilon(\tau - t') d\tau - \\ - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, t') \varepsilon(t - \tau) d\tau.$$

It results from (118) and (112) that

$$(119) \quad W(t, t') = \overline{W}(t) \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, t') \varepsilon(\tau - t') d\tau \right],$$

hence

$$(120) \quad S = W(\infty, -\infty) = \overline{W}(\infty) \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, -\infty) d\tau \right].$$

It follows from (117) that

$$(121) \quad S = 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \{ V_0^{-1}(\tau) H'(\tau) V_0(\tau) \} W(\tau, -\infty) d\tau,$$

therefore (120) may be written as

$$(122) \quad S = \frac{1}{2} \overline{W}(\infty) [1 + S].$$

By putting

$$(123) \quad S = 1 - iT, \quad \overline{W}(\infty) = 1 - \frac{i}{2} K,$$

(122) goes over into the basic equation of the FUKUDA and MIYAZIMA treatment of the damping (?)

$$(124) \quad T = K - \frac{i}{2} KT.$$

FUKUDA and MIYAZIMA use the series expansion of $\overline{W}(\infty)$ obtained from (112) by the application of the method of successive approximations. This expansion can be obtained immediately from (110)

$$(125) \quad \overline{W}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}^n \cdot 1(t).$$

9. - We shall now examine in detail the relations between the two treatments of the damping. The super-operators \mathcal{Q} and \mathcal{K} are related by the following equation

$$(126) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] \mathcal{Q} \cdot A(t) dt = -\mathcal{K} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp[i\lambda t] dt, \quad (\text{Im} \lambda = 0).$$

Taking into account that

$$(127) \quad R_{s,0}(\lambda) = i \exp[-i\lambda\tau] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] U_{s,0}(t, \tau) d\tau, \quad (\text{Im} \lambda = 0),$$

we get from (96), (48) and (50)

$$\begin{aligned} (128) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] \mathcal{Q} \cdot A(t) dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] dt \int_{-\infty}^{+\infty} U_{s,0}(t, \tau) H'(\tau) A(\tau) d\tau \\ & = -R_{s,0}(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda\tau] H'(\tau) A(\tau) d\tau = \\ & = -R_{s,0}(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} L'(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\lambda - \omega)\tau] A(\tau) d\tau = \\ & = -\mathcal{K} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau) \exp[i\lambda\tau] d\tau. \end{aligned}$$

It follows from (126) that

$$(129) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] \mathcal{Q}^n \cdot A(t) dt = (-1)^n \mathcal{K}^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp[i\lambda t] dt,$$

and

$$(130) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda t] [1 - \mathcal{Q}]^{-1} \cdot A(t) dt = [1 + \mathcal{K}]^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp[i\lambda t] dt.$$

Equation (130) shows that we can go over from (97) to (55) by a Fourier transformation with respect to t . It follows from (130) that when λ belongs to the continuous spectrum of H_0

$$(131) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(t, t') \exp [i\lambda t] dt = 2\pi[1 + \mathcal{R}]^{-1} \cdot P_0(\lambda) \exp [i\lambda t'].$$

Since

$$(132) \quad \bar{V}(t, t') = \bar{V}(t) V_0^{-1}(t'), \quad \bar{V}(t) = V_0(t) \bar{W}(t),$$

we get from (131)

$$(133) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(t) \exp [i\lambda t] dt = 2\pi[1 + \mathcal{R}]^{-1} \cdot P_0(\lambda).$$

Generalization of Schönberg's perturbation methods.

10. — We have given a treatment of the damping ⁽⁹⁾ related to the perturbation theory, which unifies the Heitler-Peng and Schwinger theories and which allows to take into account self-energies. That treatment can be applied only when it is possible to establish a correspondence between the eigenstates of H and H_0

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{\bar{E}\theta} \rightarrow \Phi_{E,\theta}^{(0)}, & \bar{E}_{\theta} \rightarrow (E, \theta) \\ \Phi_i \rightarrow \Phi_i^{(0)}, & \bar{E}_i \rightarrow E_i^{(0)}. \end{array} \right.$$

We shall assume that H depends on a parameter μ , such that H tends to H_0 when μ tends to zero

$$(135) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} H = H_0,$$

and we shall assume that the correspondence between perturbed and unperturbed eigenstates is such that

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_{\bar{E}\theta} = \Phi_{E,\theta}^{(0)}, & \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{E}_{\theta} = E \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_i = \Phi_i^{(0)}, & \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{E}_i = E_i^{(0)} \end{array} \right.$$

In the perturbation treatment of reference ⁽⁹⁾ the operator J plays a central part

$$(137) \quad J = \sum_i P_i^{(0)} \bar{E}_i + \int P_{E,\theta}^{(0)} \bar{E}_{\theta} dE d\theta,$$

$P_l^{(0)}$ and $P_{E,\theta}^{(0)}$ being the projection operators corresponding to the eigenstates $\Phi_l^{(0)}$ and $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$. The hamiltonian H is splitted into J and I

$$(138) \quad H = J + I.$$

In the perturbation treatment in consideration, J is essentially the unperturbed hamiltonian and I the perturbation. The perturbed eigenstates Φ can be obtained from the $\Phi^{(0)}$ by means of operators Ω such that

$$(139) \quad \Omega^{-1}H\Omega = J,$$

$$(140) \quad \Phi_l = \Omega\Phi_l^{(0)}, \quad \Phi_{E,\theta} = \Omega\Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

We have shown in reference (9) that the operators Ω satisfy the integral equation

$$(141) \quad \Omega = \Omega_d + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iJ\tau] I \Omega \exp[-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau,$$

Ω_d being the diagonal part of Ω with respect to J . It follows from (141) that Ω is determined, once Ω_d is given.

Let us introduce the operators $V_J(t)$ and $R_{\pm,J}(\lambda)$

$$(142) \quad V_J(t) = \exp[-iJt] = \Omega^{-1} \exp[-iHt] \Omega,$$

$$(143a) \quad R_{+,J}(\lambda) = i \int_0^{\infty} \exp[i\lambda t] V_J(t) dt = \Omega^{-1} R_+(\lambda) \Omega, \quad (Im\lambda > 0),$$

$$(143b) \quad R_{-,J}(\lambda) = -i \int_{-\infty}^0 \exp[i\lambda t] V_J(t) dt = \Omega^{-1} R_-(\lambda) \Omega, \quad (Im\lambda < 0),$$

and the operators $R_J(\lambda)$ and $R_{s,J}(\lambda)$

$$(144) \quad R_J(\lambda) = (J - \lambda)^{-1} = \Omega^{-1} R(\lambda) \Omega,$$

$$(145) \quad R_{s,J}(\lambda) = \frac{i}{2} [R_{+,J}(\lambda) + R_{-,J}(\lambda)] = \Omega^{-1} R_s(\lambda) \Omega.$$

We have

$$(146) \quad R_{+,J}(\lambda) - R_{-,J}(\lambda) = 2\pi i \Omega^{-1} P(\lambda) \Omega.$$

Let us denote by $P_J(\lambda)$ the operator $\Omega^{-1} P(\lambda) \Omega$

$$(147) \quad P_J(\lambda) = \Omega^{-1} P(\lambda) \Omega.$$

We have obviously

$$(148) \quad JP_J(\lambda) = \lambda P_J(\lambda),$$

and

$$(149) \quad P_J(\bar{E}) = \int_{\text{s.p.}} P_{E,\theta}^{(0)} \delta(\bar{E} - \bar{E}_\theta) dE d\theta.$$

In the same way as we derived (32), we can obtain the following equation

$$(150) \quad R_\pm(\lambda) = [1 + R_{s,J}(\lambda)I]^{-1} R_{\pm,J}(\lambda) \mp i\pi[1 + R_{s,J}(\lambda)I]^{-1} P_J(\lambda) I R_\pm(\lambda).$$

The operator $U'_J(\lambda)$, analogous to $U(\lambda)$

$$(151) \quad U'_J(\lambda) = I R_+(\lambda)(J - \lambda),$$

satisfies an equation analogous to (36)

$$(152) \quad U'_J(\lambda) = [1 + I R_{s,J}(\lambda)]^{-1} I - i\pi[1 + I R_{s,J}(\lambda)]^{-1} I P_J(\lambda) U'_J(\lambda),$$

hence

$$(153) \quad \langle E, \theta | U'_J(\bar{E}) | E', \theta' \rangle = \langle E, \theta | [1 + I R_{s,J}(\bar{E})]^{-1} I | E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int \langle E, \theta | [1 + I R_{s,J}(\bar{E})]^{-1} I | E'', \theta'' \rangle \delta(\bar{E} - \bar{E}_\theta'') \langle E'', \theta'' | U'_J(\bar{E}) | E', \theta' \rangle dE'' d\theta''.$$

This is the integral equation given in reference (9), which takes into account the self-energy corrections. The essential difference between (153) and (37) is clearly shown by the $\delta(E - \bar{E}_\theta'')$ which replaces $\delta(E - E'')$, so that the shell of the energies in (153) is defined by the shifted energy \bar{E} .

There is an equation analogous to (43)

$$(154) \quad (H - \bar{E}_\theta) \{ [1 + R_{s,J}(\bar{E}_\theta)I]^{-1} \Phi_{E,\theta}^{(0)} \} = 0.$$

The operator $[1 + R_{s,J}(\bar{E}_\theta)I]^{-1}$ transforms the unperturbed eigenstate $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ of energy E into an eigenstate of H of energy \bar{E}_θ . This eigenstate of H is not yet the satisfactory one, which must be obtained by solving equation (153) or equation (150). It is easily seen that

$$(155) \quad (H - \bar{E}_l) \{ [1 + R_{s,J}(\bar{E}_l)I]^{-1} \Phi_l^{(0)} \} = 0,$$

therefore the operator Ω_1

$$(156) \quad \Omega_1 = \sum_l [1 + R_{s,J}(\bar{E}_l)I]^{-1} P_l^{(0)} + \int_{\text{s.p.} H} [1 + R_{s,J}(\bar{E})I]^{-1} P_J(\bar{E}) d\bar{E},$$

transforms the $\Phi^{(0)}$ into the corresponding Φ , hence Ω_1 is an Ω .

11. - The treatment of damping given in reference (9) has two serious limitations:

a) It is not applicable to problems in which is involved a level of H or H_0 which cannot be put in correspondence with a level of H_0 or H , respectively.

b) There is an arbitrariness in the way in which the correspondence is set up between states of the continuous spectra of H_0 and H , as it has already been shown in reference ⁽⁹⁾, so that it is not possible to give a unique definition of the basic operator J without introducing some special criterium which does not follow from the perturbation method used. In the usual applications of perturbation methods to the states of the continuum, it is assumed that the corresponding states have the same energy (see P. A. M. DIRAC: *The Principles of Quantum Mechanics*, chap. VIII, Oxford, 1947). This procedure is not satisfactory in problems involving self-energies, in which it is necessary to introduce shifts of the levels of the continuum.

We have seen that the damping theory allows us to get the shift of the discrete levels by means of the width operator $\Gamma_+(\lambda)$. When $\langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle$ is imaginary (vanishing real part), with ε_l defined by (65), the level $E_l^{(0)}$ of H_0 is shifted to a level $\bar{E}_l = \varepsilon_l$ of H .

$$(157) \quad \bar{E}_l = E_l^{(0)} - \frac{i}{2} \langle l | \Gamma_+(\varepsilon_l) | l \rangle = \varepsilon_l.$$

We may apply the same procedure to determine the shifts of the levels of the continuum. Let us introduce the numerical function $G_+(E, \theta; \lambda)$

$$(158) \quad G_+(E, \theta; \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\text{sp.}} \langle E, \theta | \Gamma_+(\lambda) | E', \theta' \rangle \cos [(E - E')\tau] \prod_{\theta} \cos [\theta - \theta'] \tau dE' d\theta'.$$

The limit in (158) is of a generalized kind, such that $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos \tau x = 0$ for $x \neq 0$ (see HARDY: *Divergent Series*, pag. 12, Oxford, 1949). When the width operator Γ_+ is diagonal in the $(H_0, \theta_{\text{op}})$ representation, we have (*)

$$(159) \quad \Gamma_+(\lambda) = G_+(H_0, \theta_{\text{op}}, \lambda),$$

because in this case

$$(160) \quad \langle E, \theta | \Gamma_+(\lambda) | E', \theta' \rangle = G_+(E, \theta; \lambda) \delta(E - E') (\theta - \theta').$$

We shall assume that the equation

$$(161) \quad \varepsilon_\theta = E - \frac{i}{2} G_+(E, \theta; \varepsilon_\theta),$$

has a single root in the neighbourhood of E , and we shall take

$$(162) \quad \bar{E}_\theta = \text{Re} \varepsilon_\theta.$$

(*) $G_+(H_0, \theta_{\text{op}}, \lambda)$ is the diagonal part of $\Gamma_+(\lambda)$ with respect to both H_0 and the θ_{op} .

It results from the preceding considerations that it is satisfactory to take always

$$(163) \quad J = \sum_i P_i^{(0)} Re \varepsilon_i + \int_{\text{sp.}} P_{E,\theta}^{(0)} Re \varepsilon_\theta dE d\theta.$$

Thus we can get rid of the inconveniences of the treatment given in reference (*). In the general case we are considering now, it is no more possible to introduce operators Ω , because the spectra of H and J do not coincide always, but it is still possible to define V_J , $R_{\pm,J}$, $R_{s,J}$ and P_J by means of the difference $R_{+,J} - R_{-,J}$. Equations (150) and (153) are still valid.

RIASSUNTO (*)

Si dà un'espressione generale per l'equazione di Heitler e Peng. Si esaminano dettagliatamente le relazioni tra le teorie generalizzate di Heitler e Peng e di Schwinger sullo smorzamento. Si generalizza una forma della teoria dello smorzamento data dall'autore in un precedente lavoro per il caso di un'interazione qualsiasi indipendente dal tempo. Si mostra che la forma generalizzata della trattazione dello smorzamento di Heitler e Peng può essere usata per sviluppare una forma di teoria delle perturbazioni stazionarie applicabile a casi in cui non sia possibile stabilire una corrispondenza tra stati stazionari perturbati e imperturbati.

(*) *Traduzione a cura della Redazione*

Sui mesoni associati ai grandi sciami.

S. FUBINI

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 31 Luglio 1951)

Riassunto. - Si considera l'influenza della fotoproduzione dei mesoni sul meccanismo dei grandi sciami dell'aria. Si ottiene come risultato che una aliquota non trascurabile dei mesoni associati ai grandi sciami è di origine fotonica.

Introduzione.

Esperienze recenti, eseguite a Berkeley ⁽¹⁾ mostrano che fotoni con energie attorno ai 300 MeV, nell'urto con i nucleoni, generano mesoni positivi e negativi. Calcoli teorici, eseguiti con la teoria pseudoscalare ⁽²⁾ ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, danno risultati in buon accordo con l'esperienza. Dato il valore rilevante della sezione d'urto (ordine di grandezza di 10^{-28} cm²), si deve ritenere che tale effetto debba contribuire a creare un numero non trascurabile di mesoni associati ai grandi sciami dei raggi cosmici.

L'esperienza ⁽⁵⁾ rivela che il numero totale dei mesoni presenti in un grande sciame è circa uguale al 2% del numero degli elettroni. Il presente lavoro ha come scopo di valutare la frazione del numero di tali mesoni che è di origine fotonica.

⁽¹⁾ K. A. BRUECKNER e M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1725 (1949); J. STEINBERGER e A. S. BISHOP: *Phys. Rev.*, **78**, 494 (1950); J. M. PETERSON, R. S. WHITE e W. S. GILBERT: *Mexico Meeting in Bull. of the Am. Phys. Soc.*, pag. 20 (June 1950).

⁽²⁾ G. MORFURGO: *Nuovo Cimento*, **7**, 855 (1950).

⁽³⁾ P. BENOIST-GUÉTAL, J. PRENTKI e J. RATIER: *Journ. de Phys.*, **79**, 641 (1950).

⁽⁴⁾ K. A. BRUECKNER: *Phys. Rev.*, **79**, 641 (1950).

⁽⁵⁾ G. COCCONI, A. LOVERDO e V. TONGIORGI: *Naturwiss.*, **31**, 135 (1943); J. E. TREAT e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **74**, 414 (1948).

Questo argomento è già stato esaminato con cura da P. BUDINI ⁽⁶⁾, che ha eseguito il calcolo con uno schema che non differisce molto da quello che è stato qui adottato. Si deve però notare che le ipotesi di partenza della teoria di HAMILTON, HEITLER e PENG ⁽⁷⁾ accettate da BUDINI non sono più considerate valide, e che i valori numerici delle sezioni d'urto usati da BUDINI non sono in accordo con i valori sperimentali recenti, pertanto riteniamo utili un riesame della questione ed un calcolo numerico basato su dati recenti.

Eseguiamo il calcolo nei casi particolari di sciami generati da elettroni primari rispettivamente di energie $2,8 \cdot 10^{14}$ e $2,8 \cdot 10^{12}$ eV.

Nei dispositivi sperimentali atti a rivelare mesoni i contatori sono schermati con spessori di piombo tali da assorbire la maggior parte della componente molle. Così usualmente saranno registrati non solo i mesoni prodotti nell'aria ma anche quelli prodotti nel piombo. Calcoleremo anche questo contributo.

Impostazione dei calcoli.

Le notazioni da noi usate sono le seguenti:

M	= massa del protone (e del neutrone)
m	= massa dell'elettrone
M_π	= massa del mesone π
M_μ	= massa del mesone μ
P	= energia del mesone π
Q	= energia del mesone μ
E_0	= energia dell'elettrone primario
W	= energia del fotone
p	= P/M_π
q	= Q/M_μ
$1 + y$	= W/P .

t indicherà gli spessori d'aria attraversati che saranno espressi in unità di radiazione (la lunghezza di radiazione per l'aria è: $X = 44$ g/cm²).

Sia $\gamma(W, t) dW$ il numero di fotoni appartenenti all'intervallo $(W, W + dW)$ presenti alla profondità t e sia $\sigma(W, P) dP$ la sezione d'urto differenziale per la produzione fotonica dei mesoni. Il numero dei mesoni creati nello spessore dt è dato da: $B(P, t) dt$ dove:

$$(1) \quad B(P, t) dP = \frac{1}{2} N X dP \int_P^\infty \gamma(W, t) \sigma(W, P) dW ;$$

⁽⁶⁾ P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 163 (1949).

⁽⁷⁾ J. HAMILTON e H. W. PENG: *Proc. R.I.A.*, **49** A, 197 (1944).

il fattore $1/2$ dipende dal fatto che alla creazione dei mesoni positivi contribuiscono solo i protoni dello spessore d'aria attraversato, mentre alla creazione dei mesoni negativi contribuiscono solo i neutroni.

Introducendo i simboli p ed y , la (1) diventerà:

$$(1') \quad B(p, t) dp = \frac{1}{2} NX dp \int_0^\infty \gamma[p(+ y), t] \sigma(p, y) dy.$$

Il mesone π si disintegra in μ dopo un tempo assai breve rispetto alla vita media del μ e cede a quest'ultimo circa l'80% della sua energia. Essendo circa $M_\mu = 0,8 M_\pi$, seguirà $p = q$.

Nello spessore dt il numero dei mesoni μ aumenterà di:

$$(1'') \quad B(q, t) dq = \frac{1}{2} NX dq \int_0^\infty \gamma[q(1 + y), t] \sigma(q, y) dy.$$

Chiamerò $\varphi(q, t) dq$ ⁽⁸⁾ il numero di mesoni μ nell'intervallo dq . Tenendo conto soltanto della creazione dei mesoni da parte dei fotoni e della disintegrazione spontanea dei mesoni μ , si ottiene per la φ la seguente equazione differenziale:

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{dt} + \frac{r}{t} \varphi = B(q, t),$$

dove:

$$(3) \quad r = \frac{12,6}{\sqrt{q^2 - 1}}.$$

Impongo come condizione iniziale $\varphi(q, 0) = 0$. La (2) ha allora per soluzione:

$$(4) \quad \varphi(q, t) = t^{-r} \int_0^t (t')^r B(q, t') dt'.$$

Integrando rispetto a q , si otterrà il numero totale $N(t)$ dei mesoni alle varie altezze:

$$(5) \quad N(t) = \int_1^\infty \varphi(q, t) dq.$$

⁽⁸⁾ Le notazioni: φ , B , σ quando non hanno nessun indice si riferiscono tanto ai mesoni positivi che a quelli negativi. Se vorremo riferirci soltanto a mesoni di un dato segno, useremo le notazioni φ^+ , B^+ , σ^+ ; φ^- , B^- , σ^- .

Calcolo dello spettro dei mesoni.

Sarà innanzitutto necessario valutare la quantità $B(q, t)$. Le sezioni d'urto differenziali per la fotoproduzione di mesoni positivi e negativi sono date in ⁽³⁾:

$$(6) \quad \sigma^+(W, P) dP = \frac{1}{16\pi M} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^2 (f_3)^2 \left\{ \frac{2M_\pi^2(W-P)(M_\pi^2-2MP)}{W[M_\pi^2+2M(W-P)]^2} + \frac{W(2MP-M_\pi^2)+M_\pi^2M}{2MW^2} \right\} dP,$$

$$(6') \quad \sigma^-(W, P) = \left(\frac{2MW}{2MP-M_\pi^2} \right)^2 \sigma^+(W, P).$$

In accordo con ⁽³⁾ assumeremo per f_3 il valore:

$$\frac{(f_3)^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{10} \left(\frac{2M}{M_\pi} \right)^2.$$

Introducendo le quantità p ed y , le (6) diventeranno:

$$(7) \quad \sigma(y, p) dp = 10^{-28} \text{ cm}^2 \times \frac{8}{p^2(1+y)^3} \left\{ \frac{ap-1}{ap} + \frac{1}{2p^2(1+y)} - \frac{2(ap-1)y}{(1+apy)^2} \right\} dp,$$

$$(7') \quad \sigma^+(y, p) dp = \frac{a^2 p^2 (1+y)^2}{(ap-1)^2} \sigma^+(y, p),$$

dove

$$a = \frac{M}{M_\pi}.$$

In un articolo di ROSSI e GRIESEN ⁽⁴⁾ è data l'espressione dello spettro differenziale dei fotoni presenti in uno sciame creato da un elettrone primario di energia E_0 .

$$(8) \quad \gamma(W, t) dW = \frac{1}{(2\pi s)^{1/2}} \frac{L(s)}{[\lambda_1'(s) + 1/2s^2]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{W} \right)^s \frac{dW}{W} \exp[\lambda_1(s)t],$$

$$(9) \quad t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\log \left(\frac{E_0}{W} \right) - \frac{1}{2s} \right],$$

dove le quantità $L(s)$, $\lambda_1(s)$, $\lambda_1'(s)$, $\lambda_1''(s)$ sono tabellate. Il parametro s è, attraverso la (9) funzione di W e di t .

È necessario, per poter eseguire la integrazione indicata dalla formula (1''), fare qualche semplificazione nelle (8), (9). Introduco una energia media

⁽⁴⁾ B. ROSSI e K. GRIESEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

$W_m = 280$ MeV (per la quale si ha la massima produzione di mesoni). Poichè le energie dei fotoni per le quali si ha una emissione non trascurabile di mesoni si trovano comprese fra i 140 e i 1000 MeV, il $\log (W_m/W)$ sarà da noi ritenuto trascurabile rispetto a $\log (E_0/W_m)$. Sarà perciò:

$$(8') \quad \gamma(W, t) dW = \frac{1}{(2\pi s)^{1/2}} \frac{L(s)}{[\lambda_1''(s) + 1/2s^2]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{W_m}\right)^s \exp [\lambda_1(s)t] \cdot \left(\frac{W_m}{W}\right)^s \frac{dW}{W},$$

$$(9') \quad t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\log \left(\frac{E_0}{W_m} \right) - \frac{1}{2s} \right].$$

La quantità:

$$\frac{1}{[2\pi s]^{1/2}} \frac{L(s)}{[\lambda_1''(s)t + 1/2s^2]^{1/2}} \left(\frac{E_0}{W_m}\right)^s \exp [\lambda_1(s)t],$$

è, attraverso la (9'), funzione della sola t e sarà da noi indicata con $F(t)$.

Per valori di t che ci interessano, per quelli cioè abbastanza vicini al massimo dello sciame, il parametro s non si scosta molto dal valore 1. Per semplicità nel termine $(W/W_m)^s$ porremo $s = 1$. Risulterà allora:

$$(10) \quad \gamma(W, t) dW = F(t) \frac{W_m}{W} \frac{dW}{W},$$

ed, essendo $W_m = 2M_\pi$:

$$(10') \quad \gamma[p(1+y), t] dy = 2F(t) \frac{dy}{q(1+y)^2}$$

Sostituendo nella formula (1'') e tenendo conto delle (7), (7'):

$$(11) \quad B^+(q, t) = 0,64 \cdot 10^{-3} S^+(q) \frac{dq}{q^3} F(t),$$

$$(11') \quad B^-(q, t) = 1,28 \cdot 10^{-3} S^-(q) \frac{dq}{q^3} F(t).$$

Le due funzioni $S^+(q)$ ed $S^-(q)$ hanno valori vicini all'unità e tendono ad essa asintoticamente. I valori di tali funzioni sono riportati nella seguente tabella:

q	1,10	1,18	1,00	1,25	1,47	1,69	2,05	2,50	2,94	4,04	5,14
$S^+(q)$	0,92	0,89	0,87	0,86	0,83	0,81	0,77	0,79	0,82	0,83	0,85
$S^-(q)$	1,18	1,12	1,08	1,04	0,98	0,96	0,94	0,91	0,90	0,91	0,93

Nell'ordine di approssimazione da noi usato porremo $S^-(q) = 1$; $S^+(q) = 0,9$: otterremo allora, ponendo: $B^{\text{tot}} = B^+ + B^-$:

$$(12) \quad \begin{cases} B^{\text{tot}}(q, t) dq = 1,9 \cdot 10^{-3} \frac{dq}{q^3} F(t), \\ B^+ = 0,3 B^{\text{tot}}, \quad B^- = 0,7 B^{\text{tot}}. \end{cases}$$

Sostituendo nella (4) otterremo:

$$(13) \quad \varphi^{\text{tot}}(q, t) dq = 1,9 \cdot 10^{-3} \frac{dq}{q^3} t \cdot \int_0^t (t') F(t') dt'.$$

La funzione $F(t)$ sarà da noi approssimata mediante un polinomio in t :

$$(14) \quad F(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4.$$

Dalla (13) otterremo allora:

$$(15) \quad \varphi^{\text{tot}}(q, t) dq = 1,9 \cdot 10^{-3} \frac{dq}{q^3} t \left[\frac{A}{r+1} + \frac{Bt}{r+2} + \frac{Ct^2}{r+3} + \frac{Dt^3}{r+4} + \frac{Et^4}{r+5} \right].$$

Il numero totale dei mesoni sarà (ricordando la (5)):

$$(16) \quad N^{\text{tot}}(t) = 1,9 \cdot 10^{-3} \cdot t [AI_1 + BI_2 + CI_3 + DI_4 + EI_5],$$

dove:

$$(17) \quad I_k = \int_1^\infty \frac{dq}{q(r+k)} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

k	1	2	3	4	5
$10^3 I_k$	4,8535	4,1888	3,7259	3,3839	3,1074

Risultati numerici.

È stato calcolato numericamente il numero dei mesoni e degli elettroni presenti in sciame, rispettivamente di energie $2,8 \cdot 10^{14}$ e $2,8 \cdot 10^{12}$ eV, per diversi spessori d'aria.

Un calcolo analogo è stato effettuato per il numero dei mesoni prodotti

nel piombo. Per spessori d'aria che si trovino abbastanza al di sotto del massimo dello sciame il numero dei mesoni del piombo è trascurabile rispetto al numero dei mesoni dell'aria; nella regione del massimo invece i due numeri sono confrontabili.

I risultati numerici trovati sono i seguenti:

	Sciame di $2,8 \cdot 10^{14}$ eV		Sciame di $2,8 \cdot 10^{12}$ eV		
	$t = 13,5$ (mass.)	$t = 25$	$t = 9$ (mass.)	$t = 20$	$t = 25$
N. elettroni . . .	10^5	$1,2 \cdot 10^4$	1 200	86	12
N. mesoni aria . .	50	32	0,45	0,25	0,11
N. mesoni Pb . .	35	—	0,34	—	—
N. mesoni/N. elettr.	$0,85 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$

Conclusione.

Il rapporto fra il numero dei mesoni di origine fotonica e quello degli elettroni varia al variare del cammino percorso a partire dall'origine; e cioè è abbastanza piccolo nel massimo della cascata, crescendo notevolmente nei tratti decrescenti dello sviluppo della cascata. Di tale fatto ci si rende ragione pensando che i mesoni percorrono prima di disintegrarsi spessori notevoli: da ciò deriva che lo spettro dei mesoni segue con maggiore lentezza le variazioni con lo spessore dello spettro elettrofotonico. Nei tratti decrescenti della curva il rapporto considerato sarà dunque maggiore che nei tratti crescenti.

Dal confronto dei risultati numerici con il dato sperimentale, già citato, che in uno sciame è presente circa il 2% di mesoni, si trae la conclusione che il fenomeno della fotoproduzione interviene in maniera non trascurabile nel meccanismo della produzione dei mesoni nei grandi sciami. Per lo sciame di $2,8 \cdot 10^{14}$ eV la percentuale dei mesoni di origine fotonica sul numero totale dei mesoni varia da un 4% in prossimità del massimo a un 12% al livello del mare. Per lo sciame di $2,8 \cdot 10^{12}$ eV la percentuale va da un 3,4% presso il massimo a circa il 45% al livello del mare; questo risultato deve essere

considerato solo come una indicazione in vista della ovvia difficoltà di una interpretazione statistica di numeri così piccoli di particelle come quelli risultanti dalla tabella.

Ringrazio i professori E. PERUCCA e G. WATAGHIN per il loro cordiale interessamento, ed il prof. WATAGHIN per avermi gentilmente consigliato l'argomento di questo lavoro.

SUMMARY

The influence of the production of π -mesons by photons on the extensive air showers is considered. It is shown that an appreciable fraction of the mesons associated with showers is originated by photons.

Studio della radioattività di lave vesuviane.

F. BACHELET e M. FERRETTI SFORZINI

Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

F. IPPOLITO

Istituto di Geologia Applicata dell'Università, Centro di Studi Silani del C.N.R. - Napoli

(ricevuto il 3 Agosto 1951)

Riassunto. — Si presentano e si discutono i primi risultati di uno studio, condotto col metodo delle emulsioni per fisica nucleare, sulla radioattività di alcuni campioni di «lave vesuviane» di varia antichità.

L'uso delle lastre per fisica nucleare nello studio della radioattività delle rocce è stato proposto da I. CURIE nel 1946 ⁽¹⁾, e la tecnica è stata in seguito perfezionata ⁽²⁻¹⁰⁾ ed applicata allo studio di rocce sia granitiche ^{(2) (3) (4) (11) (12) (13)} sia di altro tipo: gneiss e micascisti ⁽¹³⁾, anortositi ⁽⁵⁾, pegmatiti ⁽⁶⁾.

Tali ricerche hanno dimostrato che il metodo permette non solo di deter-

⁽¹⁾ I. CURIE: *Journ. Phys. et Rad.*, **7**, 313 (1946).

⁽²⁾ A. HEE: *Compt. Rend.*, **227**, 356 (1948).

⁽³⁾ E. E. PICCIOTTO: *Bull. Soc. Belge Géol. Paléont. et Hydrol.*, **58**, 75 (1949).

⁽⁴⁾ J. H. J. POOLE e J. W. BREMMER: *Nature*, **163**, 130 (1949).

⁽⁵⁾ E. E. PICCIOTTO: *Bull. Soc. Belge Geol. Paléont. et Hydrol.*, **59**, 170 (1950).

⁽⁶⁾ H. V. BUTTLAR: *Diplomarbeit. Göttingen* (Nov. 1950).

⁽⁷⁾ J. W. BREMMER: *Proc. Phys. Soc.*, **A 64**, 25 (1951).

⁽⁸⁾ I. H. FORD: *Nature*, **167**, 273 (1951).

⁽⁹⁾ R. COPPENS: *Compt. Rend.*, **232**, 724 (1951).

⁽¹⁰⁾ I. CURIE et H. FARAGGI: *Compt. Rend.*, **232**, 959 (1951).

⁽¹¹⁾ J. H. J. POOLE e J. W. BREMMER: *Nature*, **161**, 884 (1948).

⁽¹²⁾ A. HEE: *Ann. de Géoph.*, **4**, 242 (1948).

⁽¹³⁾ R. COPPENS: *Journ. de Phys. et Rad.*, **11**, 21 (1950).

TABELLA I.

k	0	1	2	3	4	5
N_k	0	1	0	2	4	2
$N \cdot p(k; 32)$	$0,6 \cdot 10^{-11}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-9}$	$3,12 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$

N = numero totale quadretti di 800 μ di lato presi in esame = 719.

N_k = numero di caselle con k tracce rilevato sulla mappa.

$N \cdot p(k; 32)$ = numero di caselle con k tracce previste in base alla legge di Poisson.

minare la distribuzione dell'attività rispetto ai vari minerali costituenti la roccia, ma anche di ottenere dei dati per il dosaggio dell'Uranio e del Torio contenuti nella roccia stessa, nell'ipotesi che le rispettive famiglie radioattive abbiano ivi raggiunto l'equilibrio secolare, e questo non sia stato successivamente turbato mediante aggiunta o sottrazione di alcuni elementi della famiglia, durante le vicende geochimiche che il materiale ha subito.

Ci è parso interessante applicare il metodo allo studio delle lave del Vesuvio, il cui contenuto in sostanze radioattive risultava, da misure precedenti eseguite con altri metodi ⁽¹⁴⁾, piuttosto elevato rispetto ad altre rocce ignee non differenziate, e presentava una variazione piuttosto uniforme colla data di eruzione, non riscontrata finora per altri vulcani. L'esame dell'andamento di tale variazione aveva già suscitato tentativi di spiegazione ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁶⁾ basati su particolari ipotesi sulla formazione e sulla trasformazione del magma.

Abbiamo perciò esposto 12 lastre Ilford C2 di 50 μ all'irraggiamento di altrettante sezioni sottili di lava ⁽¹⁷⁾, appartenenti a eruzioni di diversa età, per 23 giorni, e poi le abbiamo sviluppate con soluzione D19L. Riferiamo qui sull'esplorazione finora effettuata al microscopio, con ingrandimento 760 (obiettivo ad immersione) sulle lastre relative a lave del 1899 (I) e del 79 (II) ⁽¹⁸⁾.

L'attività globale media, detratto l'effetto di fondo, è risultata per la lava I di $2,3 \cdot 10^{-3}$ e per la lava II di $3,8 \cdot 10^{-4}$ tracce di particelle α per

⁽¹⁴⁾ J. JOLY: *Phil. Mag.*, **18**, 577 (1909).

⁽¹⁵⁾ B. GUTENBERG: *Handbuch der Geophysik*, Bd. II, Lief 1 (Bornträger, Berlin, 1931).

⁽¹⁶⁾ A. RITTMANN: *Vulcani, attività e genesi* (E.P.S.A., Napoli, 1944).

⁽¹⁷⁾ Le sezioni sottili preparate col solito noto metodo sono state messe a contatto dell'emulsione con moderata pressione.

⁽¹⁸⁾ All'esplorazione hanno collaborato la dott. M. SPADA e il laureando O. MENDOLA, che qui ringraziamo.

6	7	8	9	10	12	14
1	3	5	0	2	3	1
$5 \cdot 10^{-5}$	$3,85 \cdot 10^{-4}$	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$0,7 \cdot 10^{-1}$

cm² e s ⁽¹⁹⁾: la lava del 1899 risulta cioè circa 6 volte più attiva di quella del 79.

Mentre è in corso la misura dell'attività globale di lave di altre eruzioni, per verificare se l'andamento crescente della attività trovato da JOLY risulta confermato col metodo fotografico anche per date intermedie e posteriori, abbiamo cercato di mettere in relazione il contenuto in sostanze radioattive e la loro distribuzione con la composizione e la struttura mineralogica dei due campioni.

Riportiamo nelle figg. 1 e 3 le microfotografie delle sezioni I e II, e nelle figg. 2 e 4 le mappe delle tracce di particelle α osservate.

Si è proceduto all'analisi statistica della distribuzione delle tracce nelle due mappe. Poichè già a una prima ispezione la mappa I (fig. 2) si presenta con evidenti disuniformità, si è applicato il metodo di Poisson per studiare α) la frequenza delle caselle con poche tracce che sarebbe stata da attendersi se la distribuzione fosse stata perfettamente casuale; β) l'analoga frequenza delle caselle con molte tracce. Nel caso α) risulta (vedi tab. I) che la probabilità di trovare caselle di $800 \times 800 \mu^2$ con meno di 14 tracce è praticamente nulla, e nel caso β) che è praticamente nulla la probabilità di trovare caselle di $400 \times 400 \mu^2$ con più di 17 tracce.

Il confronto con i dati sperimentali suggerisce quindi l'ipotesi ch  nelle zone α) si abbia una concentrazione di materiale non attivo e nelle zone β) una concentrazione di materiale attivo rispetto al resto della lastra. Alcune delle zone α) sono state contraddistinte sulla mappa colle lettere *a*, *b*, *c*, *d*, e quelle β) sono state indicate mediante le caselle stesse adoperate per l'analisi.

Il numero medio di tracce per casella è stato calcolato su 4886 tracce e risulta di circa 35 per casella di 800μ di lato; l'esame statistico sulle celle del tipo α) e β) è stato condotto sull'intera sezione (circa 21 000 tracce). Gli scarti che appaiono in tab. I fra i risultati numerici e quelli sperimentali rientrano come ordine di grandezza nell'effetto di fondo la cui intensità è stata trovata pari a $\sim 2,4$ tracce per casella di $800 \times 800 \mu^2$

⁽¹⁹⁾ Abbiamo tenuto conto solo delle tracce la cui proiezione orizzontale era maggiore di $\sim 5.5 \mu$.

Lo studio della mappa II (fig. 4) ha dato, su 2105 tracce, una media di $\sim 2,21$ tracce per casella di $400 \times 400 \mu^2$. Il metodo di Poisson è stato questa volta esteso all'intera superficie, tenendo conto anche dei valori intermedi delle densità si riportano in tab. II i risultati ottenuti.

TABELLA II.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N_k	165	169	189	110	75	57	31	15	11	7	4	4	0	0	1
$N \cdot p(k; 2,21)$	101	222	245	181	100	44	17	6	2	0,4	0,8	0,015	0,003	0,0005	0,00008

N = numero totale quadretti con 400μ di lato presi in esame = 910.

N_k = numero di caselle con k tracce rilevato sulla mappa.

$N \cdot p(k; 2,21)$ = numero di caselle con k tracce previste in base alla legge di Poisson.

Si rileva anche qui che la distribuzione non è uniforme, il che è assai meno evidente a una prima ispezione che non nel caso della mappa I.

L'analisi petrografica delle due sezioni sottili delle lave I e II (figg. 1 e 3) è stata particolarmente difficile a causa del notevole spessore (di poco superiore a 50μ).

La lava I è una vesuvite a struttura porfirica con fenocristalli, talora aggregati, di leucite (delle dimensioni di qualche mm) e più raramente di augite. La massa fondamentale è costituita da un feltro di microliti di plagioclasio (bitownite), leucite (ambidue anche in microfenocristalli), augite, magnetite; subordinatamente si notano sanidino, nefelina (nella mesostasi xenomorfa) ed altri minerali accessori (apatite, biotite, anfiboli, ecc.). I fenocristalli di leucite e di augite sono ricchi talvolta di inclusioni di impossibile determinazione per quanto detto sullo spessore della sezione. Il campione dal quale è stata ricavata la sezione sottile proviene da una colata lavica del 1899; esso è conservato presso l'Istituto di Geologia Applicata di Napoli.

La lava II è una tefrite a leucite a struttura porfirica, con massa fondamentale olocristallina a grana fine. I fenocristalli (delle dimensioni di qualche mm) sono costituiti essenzialmente da augite e da leucite; quelli di augite sono più abbondanti e un po' più sviluppati (fino a $2,5$ mm), presentano per lo più forma prismatica e contengono quasi sempre numerosi inclusi; quelli di leucite sono per lo più abbastanza limpidi, e contengono, in genere, pochissimi inclusi molto piccoli. Va infine notata la presenza di qualche fenocristallo di olivina completamente alterato, o quasi, in ematite e limonite. La massa fondamentale è costituita da plagioclasio (del tipo labrador-bitownitico), augite,

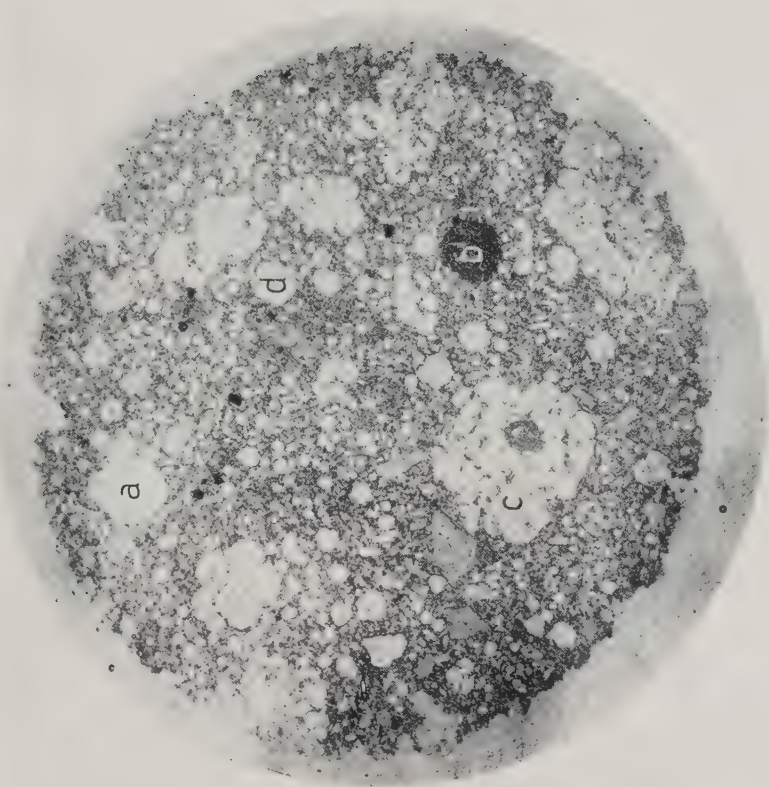


Fig. 1. - Microfotografia della vesuvite del 1899 (1). Nicols paralleli; ingr. $\times 5$. Sono visibili grossi fenocristalli o grossi aggregati sferulitici di fenocristalli di leucite (chiaro) e più rari fenocristalli di augite (cristalli prismatici, grigiastri, striati). Nella massa fondamentale si nota: leucite (cristallini chiari rotondeggianti), plagioclasio (cristallini limpidi allungati), augite e minerali opachi. Per il significato delle lettere *a*, *b*, *c*, *d*, vedi testo.

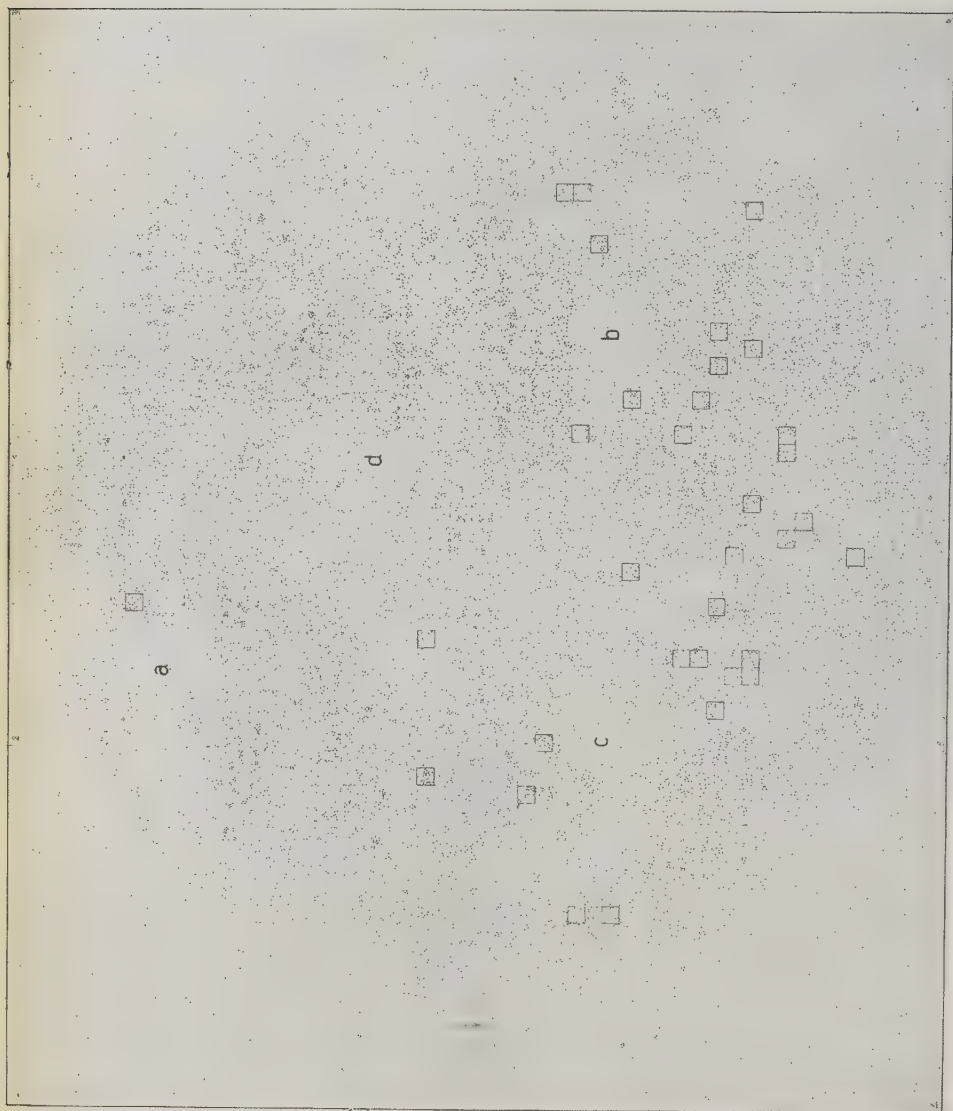


Fig. 2. - Mappa dell'attività della lava I.

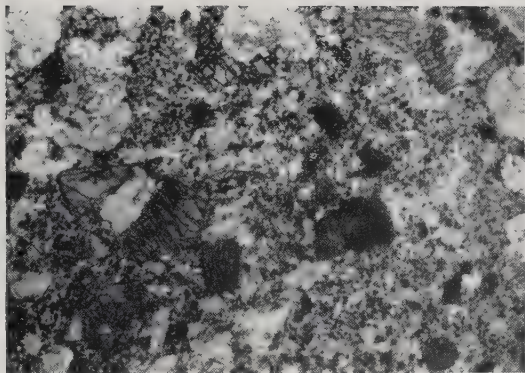


Fig. 3. — Microfotografia della tefrite a leucite di Castel Cisterna (eruzione pliniana del 79) (II). Nicols paralleli; ingr. $\times 7$. Sono visibili grossi fenocristalli di leucite e di augite; quasi al centro un grosso fenocristallo di olivina quasi completamente trasformato in ematite. Nella massa fondamentale si notano cristalli di feldspati (chiari, allungati), augite (grigiastri), leucite (chiari, rotondeggianti) e minerali opachi.

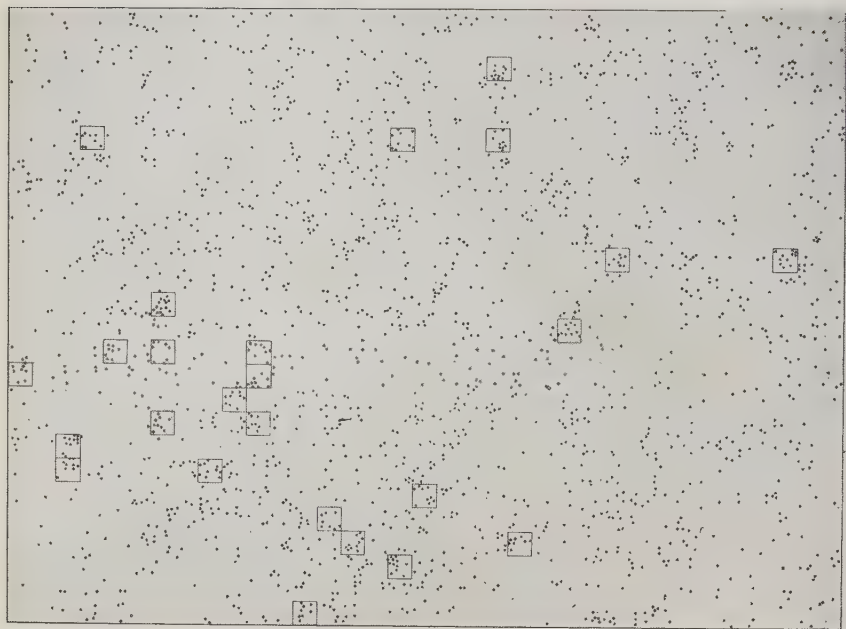


Fig. 4. - Mappa dell'attività della lava II.

leucite e minerali opachi (magnetite); subordinatamente si notano microliti di sanidino, olivina, biotite, orneblenda e apatite. La biotite in particolare nella sezione esaminata è piuttosto rara e per lo più priva di inclusi. La lava in esame proviene dalla colata di Castel Cisterna, attribuita, come è noto, all'eruzione pliniana del 79; il campione relativo è presso l'Istituto di Geologia Applicata di Napoli.

Come chimismo la lava di Castel Cisterna è notevolmente più acida di quella del 1899 ed ha un minore contenuto di potassio. Non può dirsi di più in merito, perchè mentre per la lava del 79 possediamo l'ottima analisi del NARICI⁽²⁰⁾, quella del 1899 non è stata mai chimicamente analizzata.

L'osservazione ed il paragone delle figg. 1-2 e 3-4 ci permette di emettere qualche prima conclusione sulla radioattività di queste due rocce. Anzitutto nelle due rocce esaminate la distribuzione delle tracce delle particelle α indica — e lo studio al microscopio lo conferma — che non esistono minerali specifici di U e di Th come del resto era da attendersi per ragioni magmalogiche.

Nella fig. 2 la zona *a*, dove praticamente vi è la stessa distribuzione delle α del fondo, corrisponde, nella microfotografia (fig. 1) ad un cristallo di leucite che, durante la preparazione della sezione sottile, è stato asportato dall'azione dell'abrasivo. Risulta ancora dal paragone delle due figure (vedi *b*, *c*, *d*) che le aree corrispondenti a fenocristalli presentano una densità minore di particelle α . Ciò indica che nei fenocristalli intratellurici, formatisi nella massa magmatica prima della sua estrusione, non vi è stata una sensibile sostituzione isomorfica di elementi radioattivi ad altri di prossimo raggio ionico. Dobbiamo dunque ammettere che le sostituzioni isomorfe di altri metalli da parte degli elementi radioattivi avvengano in presenza della fase gassosa del magma, all'atto dell'eruzione e della successiva rapida cristallizzazione della lava. Questo fatto si inquadra perfettamente col noto comportamento degli elementi radioattivi, che tendono a restare nella fase gassosa.

Per quanto concerne le concentrazioni di particelle superiori alla media nella fig. 2, siamo indotti ad attribuirle alla presenza, nei minerali essenziali (in fenocristalli o in microliti del feltro) di qualche incluso (zircone, ilmenite, titanite, ecc.) i quali, come è noto, sono relativamente ricchi di U o Th in sostituzione isomorfogena.

Le restanti zone della fig. 2, con la loro distribuzione di particelle α abbastanza omogenea, ci autorizzano a ritenere che gli elementi radioattivi abbiano sostituito isomorficamente altri ioni di prossimo raggio ionico più o meno in tutti gli altri minerali della massa fondamentale.

Le figg. 3 e 4, relative alla tefrite leucitica di Castel Cisterna, non ci permettono un esame molto dettagliato. L'osservazione della fig. 4 conferma il

⁽²⁰⁾ E. NARICI: *Zeits. f. Vulk.*, **14**, 210 (1932).

dato numerico sopra riportato della minore attività di questa lava. Si suggerisce anche qui l'ipotesi che l'esistenza di un certo numero di caselle con nessuna traccia e tutte quelle con più di 7 (fig. 4) sia dovuta a localizzazioni rispettivamente inattive, o particolarmente attive, e si può pensare di attribuire le zone a maggior densità di tracce a minerali accessori inclusi negli essenziali.

Nulla possiamo dedurre dal lavoro fin qui eseguito su una distinzione tra le famiglie dell'U e del Th basata sull'attività. Non abbiamo ritenuto di applicare le formule usualmente adoperate per il dosaggio (v. per esempio ⁽¹⁾ e ⁽⁶⁾) perchè non abbiamo elementi sicuri sul raggiunto equilibrio radioattivo; tanto più in quanto l'evoluzione del magma Somma-Vesuviana ha probabilmente dato luogo a fenomeni geochimici selettivi, per l'azione delle masse magmatiche sulle rocce incassanti il bacino.

È nostra intenzione dedurre informazioni sullo stato di evoluzione delle famiglie radioattive nei materiali eruttati dal Vesuvio, dalla misura degli spettri di energia delle particelle α .

Nel chiudere questa nota compiamo il grato dovere di ringraziare il prof. E. AMALDI per i suggerimenti nell'impostazione della ricerca, il prof. B. FERRETTI e la dott. A. MANFREDINI per gli utili consigli e l'ing. P. NICOTERA per la gradita collaborazione.

SUMMARY

Some preliminary results on the photographically recorded radioactivity of differently aged samples of « vesuvian lava » are reported and discussed.

Annichilamento protone-antiprotone con emissione di mesoni vettoriali neutri e carichi (*).

R. S. LIOTTA

Istituto di Fisica dell'Università. Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 4 Agosto 1951)

Riassunto. — Si studia la probabilità di annichilamento protone-antiprotone con emissione di due neutretti vettoriali o due mesoni carichi vettoriali. Si adopera la teoria delle perturbazioni solita al primo ordine e si usa il campo mesonico vettoriale (neutrale e carico) con solo accoppiamento vettoriale, distinguendo sia i mesoni carichi che i neutretti in longitudinali e trasversali. Le sezioni d'urto che si ottengono per i vari processi permettono di affermare che la probabilità che vengano emessi due quanti γ è più piccola per un fattore dell'ordine 10^4 rispetto a quella che si ha per emissione di mesoni neutri o carichi. Le sezioni d'urto per produzione di mesoni si comportano come $1/(\gamma - 1)$ per $\gamma \rightarrow 1$ (γ è l'energia del protone negativo, divisa per la sua energia di riposo, nel sistema di riferimento ove il protone positivo è in quiete), invece per $\gamma \rightarrow \infty$ la parte longitudinale diventa infinita mentre quella trasversale diventa infinitesima. Per energie del protone negativo pari a 2 GeV, nel sistema ove il protone positivo è in quiete, le sezioni d'urto risultano dell'ordine di 10^{-28} cm² per emissione di neutretti e dell'ordine di 10^{-26} cm² per emissione di mesoni carichi.

Introduzione.

Le ragioni teoriche sulle quali si basa l'esistenza dei protoni negativi sono ben note e si fondano essenzialmente sulla analogia fra il comportamento degli elettroni e dei protoni. Difatti entrambe queste particelle hanno spin $1/2$ ed è quindi presumibile che anche il protone obbedisca all'equazione di Dirac

(*) Gli sviluppi analitici del presente lavoro sono stati eseguiti presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

come l'elettrone; inoltre nei calcoli fatti con le teorie mesoniche intervengono spesso in maniera essenziale come stati virtuali intermedi, gli stati ad energia negativa dei protoni e dei neutroni ed è quindi chiaro che l'esistenza di tali stati ad energia negativa comporta l'esistenza di antiprotoni ed antineutroni.

È pertanto di fondamentale interesse cercare di determinare quali metodi sperimentali possono essere utili per porre in evidenza tali antiparticelle. Il problema si presenta tanto più arduo in quanto l'esperienza ha recentemente dimostrato l'esistenza di particelle cariche di massa non troppo diversa da quella protonica (mesoni V , τ , ecc.) e che pur protoni non sono. In conseguenza può apparire difficile misurare la massa di un eventuale protone negativo con tale precisione da escludere ogni ragionevole dubbio che si tratti invece di queste nuove particelle e dimostrare così con misure di massa l'esistenza del proton \bar{e} negativo.

Vi è però un processo che dovrebbe essere caratteristico di questa particella e che quindi dovrebbe prestarsi a dimostrarne l'esistenza: il processo di annichilamento di una coppia protone negativo-protone positivo. Pertanto si è ritenuto di un certo interesse studiare questo processo il più accuratamente possibile.

Un calcolo perturbativo per annichilamento protone-antiprotone è stato fatto da J. ASHKIN, T. AUERBACH, R. MARSHAK (A.A.M.) ⁽¹⁾ usando campi mesonici scalare con accoppiamento scalare, e pseudoscalare con accoppiamento pseudoscalare, con emissione di neutretti e mesoni carichi. Per questi ultimi le sezioni d'urto trovate da A.A.M. hanno l'andamento $1/(\gamma - 1)$ per $\gamma \rightarrow 1$ per i primi, sono invece infinitesime per $\gamma \rightarrow 1$; in tutti i casi sono infinitesime per $\gamma \rightarrow \infty$.

È noto che vi sono diverse ragioni teoriche per ritenere poco probabile l'esistenza di mesoni vettoriali, però tale esistenza non può essere esclusa con pratica certezza fin qui, e pertanto per completezza si è pensato di valutare la probabilità del processo di annichilamento $P^+ + P^-$ attraverso l'emissione di mesoni vettoriali carichi e neutri entrambi con accoppiamento vettoriale.

Tali calcoli, come quelli precedenti di A.A.M., sono stati fatti con l'uso della teoria delle perturbazioni e sono esposti nel presente lavoro. Però, poichè ci si rende conto dell'inadeguatezza dello schema perturbativo per problemi del tipo di quello che stiamo trattando, secondo il suggerimento di E. FERMI ⁽²⁾ si procederà in un prossimo lavoro al calcolo con una approssimazione per così dire opposta, sperando di «inquadrare» in qualche modo la vera probabilità di transizione.

⁽¹⁾ J. ASHKIN, T. AUERBACH e R. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **79**, 267 (1950).

⁽²⁾ E. FERMI: *Prog. Teor. Phys.*, **5**, 570 (1950).

Campo mesonico vettoriale con accoppiamento vettoriale.

È noto che l'hamiltoniana dei mesoni vettoriali neutri liberi e della interazione dei mesoni coi protoni è data da ⁽³⁾:

$$H = H_0 + H_1,$$

essendo:

$$(1) \quad H_0 = ck \int \left[\Psi^2 + \pi^2 + \frac{1}{k^2} (\text{rot } \Psi)^2 + \mathbf{\Psi}^2 + \mathbf{\Pi}^2 + \frac{1}{k^2} (\text{div } \mathbf{\Psi})^2 \right] dV, \quad k = \mu c / \hbar,$$

$$(2) \quad H_1 = c \int \Phi^* \left[g \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Psi} - f \left(\boldsymbol{\Upsilon} \times \boldsymbol{\pi} - \frac{1}{k} \beta \boldsymbol{\sigma} \times \text{rot } \boldsymbol{\Psi} \right) + \right. \\ \left. + f \boldsymbol{\Upsilon} \times \mathbf{\Psi} + g \left(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{\Pi} - \frac{1}{k} \text{div } \mathbf{\Psi} \right) \right] \Phi dV.$$

In queste espressioni $\boldsymbol{\Psi}$ e $\mathbf{\Psi}$ sono variabili vettoriali (nello spazio ordinario) che definiscono il campo e $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{\Pi}$ le rispettive canoniche coniugate; esse provengono dalla suddivisione dell'originario campo vettoriale quadridimensionale (covariante relativistico) in una parte longitudinale $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{\Psi}$ e in una trasversale $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\Psi}$. Le funzioni d'onda dei nucleoni sono Φ e la coniugata Φ^* normalizzate in modo che sia $\int |\Phi|^2 dV = 1$, μ è la massa del mesone, $\boldsymbol{\alpha}$, β le solite ma-

trici di Dirac, $\boldsymbol{\Upsilon} = -i\beta\boldsymbol{\alpha}$, $\sigma_i = -i\alpha_i\alpha_k$ (i, k, l ruotano ciclicamente), f, g sono le costanti di accoppiamento, gli integrali si intendono presi su tutto lo spazio.

Il problema in esame viene trattato ponendo $f = 0$, considerando cioè il solo accoppiamento vettoriale. In tali ipotesi, quantizzando nel cubo unitario e distinguendo il campo e l'interazione in una parte longitudinale e in una trasversale, gli elementi di matrice per il processo in cui si abbia inizialmente un nucleone di impulso \mathbf{p}_m e si abbia alla fine un nucleone di impulso \mathbf{p}_n con produzione di un mesone trasversale o longitudinale di impulso \mathbf{k} , sono dati rispettivamente da:

$$(3) \quad (H'_t)_{k+n \leftarrow m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}} g \chi_n^* \alpha_2 \chi_m,$$

$$(4) \quad (H'_t)_{k+n \leftarrow m} = \frac{ig[-\varepsilon_k(E_m - E_n) + \varepsilon_k^2 - \mu^2]}{2\sqrt{\mu\varepsilon_k(\varepsilon_k^2 - \mu^2)}} \chi_n^* \chi_m.$$

Tali elementi di matrice sono ottenuti considerando i seguenti sviluppi in

⁽³⁾ N. KEMMER: *Proc. Roy. Soc.*, **166**, 127 (1938).

serie di Fourier delle variabili di campo:

$$\psi^{(r)} = \sum_k \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}} (a_k^{(r)} + a_{-k}^{(r)*}) \exp[-i\mathbf{k} \times \mathbf{x}];$$

$$\pi^{(r)} = \sum_k \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu}} i (a_k^{(r)*} - a_{-k}^{(r)}) \exp[i\mathbf{k} \times \mathbf{x}] \quad (r = 2, 3),$$

$$\Psi = \sum_k \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}} (a_k + a_{-k}^*) \exp[-i\mathbf{k} \times \mathbf{x}]; \quad \Pi = \sum_k \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu}} i (a_k^* - a_{-k}) \exp[i\mathbf{k} \times \mathbf{x}],$$

che permettono di diagonalizzare l'hamiltoniana dei mesoni liberi secondo le espressioni:

$$H_0^i = \sum_k \frac{1}{2} \varepsilon_k (a_k^* a_k + a_k a_k^*), \quad H_0^i = \sum_k \sum_r \frac{1}{2} \varepsilon_k (a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + a_k^{(r)} a_k^{(r)*}).$$

Nelle relazioni scritte è $\hbar = 1$, $c = 1$, ε_k è l'energia del mesone di impulso \mathbf{k} , E_m ed E_n quelle del protone con impulso \mathbf{p}_m e \mathbf{p}_n rispettivamente, α_i è la proiezione della matrice α nella direzione di polarizzazione del mesone trasversale, le χ sono le ampiezze delle funzioni d'onda dei nucleoni, soddisfacenti alle equazioni di Dirac per l'elettrone libero nella rappresentazione dei momenti:

$$(\alpha \times \mathbf{p}_m + \beta M) \chi_m = E_m \chi_m,$$

ove M è la massa di un nucleone.

Le a_k^* , a_k sono le solite matrici di produzione e annichilamento di mesoni neutri per cui valgono le relazioni di commutazione:

$$[a_k^{(r)}, a_{k'}^{(r)*}]_- = [a_k^{(r)*}, a_{k'}^{(r)}]_- = 0, \quad [a_k^{(r)}, a_{k'}^{(r)*}] = \delta_{kk'},$$

con che sono soddisfatte la condizione di realtà per i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier considerati e le relazioni di commutazione.

Le dimensioni di g^2 sono: $[g^2] = [e^2/\mu]$ e carica elettrica.

È noto che a differenza di quanto accade per il campo elettromagnetico ove la parte longitudinale della interazione rappresenta la interazione coulombiana statica fra le cariche la quale è nulla nel vuoto, nel campo mesonico vettoriale ciò non avviene: esistono cioè anche onde longitudinali nel vuoto.

Pertanto, volendo trattare l'annichilamento protone-antiprotone, si possono distinguere tre casi secondo che i neutretti emessi siano entrambi trasversali, entrambi longitudinali, oppure uno trasversale e uno longitudinale. Tale distinzione sarà fatta nel seguito soprattutto per comodità di calcolo e per mettere in rilievo, ove sarà possibile, l'analogia fra il comportamento dei quanti γ e dei mesoni trasversali; questa distinzione però non ha nessun significato fisico particolare e quindi il dato che bisogna prendere in considerazione è la somma delle sezioni d'urto ottenute.

Annicihilamento protone-antiprotone con emissione di due neutretti trasversali.

Si sceglie come sistema di riferimento un sistema di Lorentz ove il bari-centro delle due particelle protone-antiprotone inizialmente libere è in quiete; si potrà poi passare ad ogni altro riferimento con una trasformazione di Lorentz.

Dette \mathbf{p}_+ e \mathbf{p}_- le quantità di moto dei protoni positivo e negativo rispettivamente, e con E_+ , E_- le corrispondenti energie, nel riferimento scelto risulta:

$$\mathbf{p}_+ = -\mathbf{p}_-, \quad E_+ = E_-.$$

L'annichilamento consiste nel pensare che il protone inizialmente nello stato di momento $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_+$ ed energia $E_0 = E_+$ passi nello stato con momento $\mathbf{p} = -\mathbf{p}_- = \mathbf{p}_+$ ed energia $E = -E_- = E_+$. Per la conservazione della quantità di moto e dell'energia segue che dopo l'annichilamento debbono essere emessi due mesoni, ciascuno avente una energia pari a quella di uno dei protoni e con versi di moto opposti. Ciò indicando con \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 le quantità di moto dei neutretti emessi e con ε_{k_1} , ε_{k_2} le corrispondenti energie, deve risultare:

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, \quad \varepsilon_{k_1} = \varepsilon_{k_2} = E_0.$$

Tale processo poichè involve due neutretti è del secondo ordine; d'altra parte gli elementi di matrice dell'interazione protoni-neutretti sono non nulli solo se un sol quanto viene emesso o assorbito, quindi la transizione in esame può avvenire attraverso uno dei due stati intermedi seguenti:

1) \mathbf{k}_1 viene emesso, il momento del protone diventa $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_0 - \mathbf{k}_1$; nella transizione allo stato finale è emesso il secondo mesone \mathbf{k}_2 .

2) \mathbf{k}_2 è emesso per primo, il protone acquista il momento $\mathbf{p}'' = \mathbf{p}_0 - \mathbf{k}_2 = -\mathbf{p}_0 + \mathbf{k}_1$; nel passaggio allo stato finale viene emesso il neutretto di impulso \mathbf{k}_1 .

Le energie in questi stati intermedi sono date rispettivamente da:

$$(5) \quad E' + \varepsilon_{k_1} = E' + E_0, \quad E'' + \varepsilon_{k_2} = E'' + E_0,$$

e la perturbazione che causa la transizione è la interazione dei protoni con i neutretti.

Indicando con A, I, II, F rispettivamente lo stato iniziale, gli stati intermedi e quello finale, è noto che l'elemento di matrice che descrive l'annichilamento è:

$$(6) \quad H = \sum \left(\frac{H_{FI}H_{IA}}{E_A - E_I} + \frac{H_{FII}H_{IIA}}{E_A - E_{II}} \right),$$

la somma essendo estesa ai segni dell'energia e alle direzioni dello spin dei protoni negli stati intermedi.

Tenendo presente la (3), ove si trascura l'indice t e l'apice, gli elementi di matrice che intervengono nella (6) per le singole transizioni si scrivono:

$$(7) \quad \begin{cases} H_{\text{IA}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{k_1}}} g \chi'^* \alpha_1 \chi_0, & H_{\text{FI}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{k_2}}} g \chi^* \alpha_2 \chi', \\ H_{\text{IIA}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{k_2}}} g \chi''^* \alpha_2 \chi_0, & H_{\text{FII}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{k_1}}} g \chi^* \alpha_1 \chi'', \end{cases}$$

ove α_1 e α_2 sono le componenti del vettore α di Dirac nelle direzioni di polarizzazione dei due neutretti; χ_0 , χ' , χ'' , χ le ampiezze di Dirac della funzione d'onda del protone nello stato iniziale, negli stati intermedi e in quello finale.

La (6) allora diventa

$$(8) \quad H = \frac{g^2 \mu}{4E_0} \sum \left[\frac{(\chi^* \alpha_2 \chi')(\chi'^* \alpha_1 \chi_0)}{-E'} + \frac{(\chi^* \alpha_1 \chi'')(\chi''^* \alpha_2 \chi_0)}{-E''} \right],$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo del processo in esame è data da:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H|^2 \varrho_F,$$

ϱ_F essendo la densità degli stati finali per intervallo di energia dE_F . In questo caso lo stato finale è determinato unicamente dall'impulso k_1 di un sol neutretto perchè l'altro ha impulso opposto: se quindi si suppone fissata la direzione degli spin dei mesoni, risulta:

$$(9) \quad \varrho_F = \frac{k_1 E_0 d\Omega}{(2\pi)^3},$$

ove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido entro il quale si trova la direzione del neutretto k_1 .

La sezione d'urto differenziale è data da W diviso per la velocità del protone negativo incidente p_-/E_- , si ha pertanto:

$$(10) \quad d\Phi_1 = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{E_-}{p_-} \frac{k_1 E_0 d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{g^4 \mu^2}{16 E_0^2} \left| \sum \left(\frac{(\chi^* \alpha_2 \chi')(\chi'^* \alpha_1 \chi_0)}{-E'} + \frac{(\chi^* \alpha_1 \chi'')(\chi''^* \alpha_2 \chi_0)}{-E''} \right) \right|^2.$$

Nel caso di annichilamento protone-antiprotone con emissione di due quanti γ ⁽⁴⁾, la densità degli stati finali si ottiene semplicemente dalla (9) ove si ponga $E_0^2 = k_1^2 + \mu^2$ con $\mu = 0$, mentre l'elemento di matrice che descrive l'annichilamento è formalmente identico, salvo il fattore di proporzionalità, all'elemento di matrice (8). Tuttavia è da tener presente che la sezione d'urto

(4) P. A. M. DIRAC: *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 26, 361 (1930).

differenziale del processo in esame non si può ricondurre semplicemente a quella per emissione di due quanti γ semplicemente ponendo $\mu = 0$, perchè allora si annullerebbero gli elementi di matrice (7) e quindi la sezione d'urto stessa. Ciò dipende dal fatto che sebbene le equazioni di Maxwell nel vuoto si possano ottenere formalmente dalle equazioni del campo mesonico vettoriale neutro nel vuoto supponendo nulla la massa del mesone, lo stesso non accade per le equazioni del campo mesonico quando siano presenti i nucleoni e si consideri la interazione fra mesoni e nucleoni. È però presumibile che trascurando μ rispetto ad M , la sezione d'urto sia analoga a quella ottenuta per annichilamento protone-antiprotone con emissione di fotoni.

Eseguito nella (10) la somma indicata, la nuova espressione della sezione d'urto differenziale ottenuta mediando sulle direzioni degli spin dei protoni e sommando sulle direzioni di polarizzazione dei mesoni è data da:

$$(11) \quad d\Phi_1 = \frac{-g^4 \mu^2 k_1}{1024 E_0^2 p_0} \left\{ \frac{A}{(E_0^2 + p_0^2 - 2p_0 k_1 \cos \theta)^2} + \frac{B}{(E_0^2 + k_1^2 + 2p_0 k_1 \cos \theta)^2} + \frac{2C}{(E_0^2 + k_1^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2)} \right\} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

ove è:

$$\begin{aligned} A &= 8p_0^4 \cos^4 \theta - 8p_0^3 k_1 \cos^3 \theta + \\ &+ 4p_0^2 (3M^2 + k_1^2 - p_0^2) \cos^2 \theta + 8p_0^3 k_1 \cos \theta - 4p_0^2 (3M^2 + k_1^2 + p_0^2) - 8M^2 k_1^2, \\ B &= 8p_0^4 \cos^4 \theta + 8p_0^3 k_1 \cos^3 \theta + \\ &+ 4p_0^2 (3M^2 + k_1^2 - p_0^2) \cos^2 \theta - 8p_0^3 k_1 \cos \theta - 4p_0^2 (3M^2 + k_1^2 + p_0^2) - 8M^2 k_1^2, \\ C &= 8p_0^4 \cos^4 \theta + 4p_0^2 (3M^2 - k_1^2 - p_0^2) \cos^2 \theta - 4p_0^2 (3M^2 - k_1^2 + p_0^2), \end{aligned}$$

θ essendo l'angolo fra p_0 e k_1 , e φ la longitudine della direzione di k_1 . La sezione d'urto totale è data dalla integrazione della (11) per θ e φ compresi nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$. Infatti θ quale angolo di scattering ha appunto per limiti 0 e π , mentre φ quale longitudine potrebbe variare fra 0 e 2π ; ma facendo superare a φ il valore π , si verrebbe a invertire il ruolo di k_1 con quello di k_2 , il che non significa introdurre un nuovo stato e pertanto si può escludere che sia $\pi < \varphi \leq 2\pi$. La integrazione dà allora per la sezione d'urto totale:

$$(12) \quad \Phi_1 = \frac{\pi g^4 \mu^2}{512 E_0^2 k_1^3 p_0} \left\{ \frac{3(E_0^2 + k_1^2)^4 + 16k_1^2 [p_0^4 k_1^2 - (E_0^2 + k_1^2) p_0^2 - M^2 k_1^4]}{(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{3(E_0^2 + k_1^2)^4 + 8p_0^2 k_1^2 [2k_1^2 (2M^2 + p_0^2) - (E_0^2 + k_1^2)^2]}{4p_0 k_1 (E_0^2 + k_1^2)} \log \frac{M^2 + (p_0 + k_1)^2}{M^2 + (p_0 - k_1)^2} \right\}.$$

Poichè il protone positivo quale costituente dei nuclei il più delle volte interviene nell'urto con altre particelle legato al nucleo, conviene anche in questo caso pensarlo come tale, cioè praticamente in quiete. Si applica pertanto

al sistema di riferimento una trasformazione di Lorentz, introducendo precisamente un nuovo sistema di coordinate spaziali che si muova rispetto a quello finora considerato con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+ = \mathbf{v}_0$.

Le espressioni di p_0 , E_0 e k_1 in funzione di E' , energia del protone negativo nel nuovo sistema di riferimento, sono date da:

$$E_0 = M\sqrt{\gamma + 1}, \quad p_0 = M\sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}}, \quad k_1 = M\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\mu^2}{M^2}}, \quad \gamma = \frac{E'}{M}.$$

Se si tiene tuttavia presente che $\gamma \geq 1$ e che $\mu^2/M^2 \leq 1/36$, facendo su k_1^2 al più un errore del 3% si può porre $k_1 = M\sqrt{(\gamma + 1)/2}$; espressione che è tanto più esatta quanto più elevato è γ .

La sezione d'urto totale nel nuovo sistema di riferimento assume allora la forma:

$$\Phi_1^* = \frac{\pi R_0^2}{64(\gamma + 1)} \left\{ -\frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right\},$$

ove $R_0^2 = g^4 \mu^2 / M^2$, e se si tiene presente che g^2 ha le dimensioni del quadrato di una carica diviso per una massa, si vede che R_0^2 ha le dimensioni di una superficie.

Salvo la costante di proporzionalità, questa sezione d'urto ha lo stesso andamento in funzione di γ della formula trovata da DIRAC che dà la sezione d'urto per annichilamento elettrone-positrone con emissione di due quanti di luce. Questo risultato a priori non era assolutamente prevedibile, si giustifica ora tenendo presente l'analogia, già sopra accennata, fra il campo elettromagnetico e la parte trasversale del campo mesonico vettoriale neutro e dato che con l'approssimazione fatta (supporre trascurabile l'energia di riposo del neutretto rispetto alla energia totale) si è praticamente posta eguale a zero la massa del neutretto rispetto a quella dei nucleoni.

È chiaro che risulta $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \Phi = +\infty$, cioè la sezione d'urto per annichilamento diverge se la velocità del protone negativo tende a zero. Nel caso analogo per annichilamento di coppie di elettroni si vede che sebbene la sezione d'urto diverga tuttavia la probabilità di annichilamento non diventa infinita. Precisamente si ottiene che la vita media di un elettrone positivo molto lento in piombo è dell'ordine di 10^{-10} s.

Tale ragionamento non si può ripetere nel caso dei protoni perchè il meccanismo di annichilamento si deve pensare diverso da quello degli elettroni positivi. Questi infatti possono entrare direttamente in collisione con elettroni ordinari annichilandosi, i protoni negativi invece è probabile che vengano catturati in un'orbita atomica e dopo un periodo molto breve cadano nel nucleo annichilandosi.

Qui e nel seguito si assume per g^2 il valore ottenuto da H. FRÖLICH, W. HEITLER e N. KEMMER ⁽⁵⁾ che nelle unità scelte è:

$$g^2 = \frac{100\pi e^2}{\mu},$$

ove e è la carica dell'elettrone. In tal caso, indicando con Φ_0 la sezione d'urto per annichilamento protone-antiprotone con emissione di due quanti γ , che si ottiene dalla formula di Dirac sostituendo alla massa dell'elettrone la massa del protone, risulta $\Phi_1^* \propto 10^3 \Phi_0$; cioè l'emissione di mesoni è più probabile per un fattore dell'ordine 10^3 rispetto all'emissione di fotoni. A.A.M. hanno trovato invece che tale fattore sarebbe dell'ordine 10^4 .

Annichilamento con emissione di due neutretti longitudinali.

Gli elementi di matrice che intervengono nella (2), tenendo presente la (10), si possono scrivere in questo caso:

$$\begin{aligned} H_{FI} &= -\frac{ig(E_0^2 + E_0 E' + \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi^* \chi', & H_{IA} &= \frac{ig(E_0^2 + E_0 E' - \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi'^* \chi_0, \\ H_{FII} &= -\frac{ig(E_0^2 + E_0 E'' + \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi^* \chi'', & H_{IIA} &= \frac{ig(E_0^2 + E_0 E'' - \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi''^* \chi_0. \end{aligned}$$

Tenendo presente che la densità degli stati finali per intervallo di energia è $k_1 E_0 d\Omega/(2\pi)^3$, si ottiene per la sezione d'urto differenziale per il processo in esame la seguente espressione (si media sulle direzioni degli spin dei protoni):

$$(13) \quad d\Phi_2 = \frac{g^4 k_1 (\mu^2 + E_0^2)^2}{8\pi^2 \mu^2 E_0^3 p_0} \frac{p_0^2 k_1^4 [E_0^2 \cos^2 \theta - p_0^2 \cos^4 \theta]}{[(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2]} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

La sezione d'urto totale nel sistema del baricentro è ottenuta per integrazione della (13) per θ e φ fra 0 e π ; si ha così:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{g^4 k_1 (\mu^2 + E_0^2)^2}{128\pi \mu^2 E_0^3 p_0} \left\{ \frac{3(E_0^4 + k_1^4) + 2k_1^2(E_0^2 - 4p_0^2)}{(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(E_0^2 + k_1^2)^2 - 4E_0^2 k_1^2}{4p_0 k_1 (E_0^2 + k_1^2)} \log \frac{M^2 + (p_0 + k_1)^2}{M^2 + (p_0 - k_1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Passando nel sistema di riferimento ove il protone positivo è in quiete, con l'approssimazione $k_1 \propto \sqrt{(\gamma + 1)/2} M$, si ha per la sezione d'urto la

⁽⁵⁾ N. KEMMER: *Proc. Roy. Soc.*, **166**, 154 (1938).

espressione:

$$(14) \quad \Phi_2^* = \frac{g^4 M^2 (\gamma + 1)^2}{256 \pi \mu^2} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})}{\gamma - 1} \right\}.$$

Si ha: $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \Phi_2^* = \infty$, e un analogo comportamento si ha per Φ_1^* ; invece per $\gamma \rightarrow \infty$, Φ_2^* diventa infinita mentre Φ_1^* diventa infinitesima; in questo c'è una notevole differenza fra le due sezioni d'urto. Questo diverso comportamento si può a posteriori giustificare osservando che nel primo caso gli elementi di matrice sono inversamente proporzionali a $\sqrt{E_0}$, in questo caso invece essi sono proporzionali a $\sqrt{E_0}$.

Annichilamento con emissione di un neutretto longitudinale e uno trasversale.

Tenendo presenti la (9) e la (10) gli elementi di matrice che intervengono nella (2) si scrivono in questo caso, trascurando l'apice:

$$(H_1)_{FI} = -\frac{ig(E_0^2 + E_0 E' + \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi^* \chi', \quad (H_t)_{IA} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{E_0}} g \chi'^* \alpha_1 \chi_0,$$

$$(H_t)_{FII} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{E_0}} g \chi^* \alpha_1 \chi'', \quad (H_t)_{IIA} = \frac{ig(E_0^2 + E_0 E'' - \mu^2)}{2k_1 \sqrt{\mu E_0}} \chi''^* \chi_0.$$

La sezione d'urto differenziale è ottenuta mediando sulle direzioni degli spin dei protoni e sommando sulle direzioni di polarizzazione del neutretto trasversale; la velocità del protone negativo incidente è p/E e la densità degli stati finali per intervallo di energia $E_0 k_1 d\Omega/(2\pi)^3$. Si ha allora:

$$d\Phi_3 = \frac{-g^4 \sin \theta}{1024 \pi E_0^2 p_0 k_1} \{ (16E_0^2 p_0 k_1 \cos \theta) R - 4p_0^2 k_1^2 (1 + \cos^2 \theta) S - 4[E_0^4 + M^4 + M^2 p_0^2 (1 + \cos^2 \theta) + p_0^4 \cos^2 \theta] T \} d\theta d\varphi,$$

essendo:

$$R = \frac{16E_0^2 \mu^2 (p_0 k_1 \cos \theta)^2 + 8(E_0^2 + \mu^4)(E_0^2 + k_1^2) p_0 k_1 \cos \theta + 4E_0^2 \mu^2 (E_0^2 + k_1^2)^2}{[(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2]^2},$$

$$S = \frac{[4E_0^2 p_0 k_1 \cos \theta + 2(E_0^2 + k_1^2) \mu^2]^2}{(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2}, \quad T = \frac{[2E_0^2 (E_0^2 + k_1^2) + 4\mu^2 p_0 k_1 \cos \theta]^2}{(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2}.$$

La sezione d'urto totale nel sistema del baricentro è ottenuta integrando $d\Phi_3$ per θ e φ fra 0 e π e si ha:

$$\Phi_3 = \frac{g^4}{1024 E_0^2 p_0 k_1} \left\{ A \log \frac{M^2 + (p_0 + k_1)^2}{M^2 + (p_0 - k_1)^2} - B \right\},$$

ove A e B sono dati dalle espressioni:

$$A = \frac{(\mu^4 + E_0^4)(6E_0^2 k_1^2 - E_0^4 - k_1^4) - 2E_0^2(E_0^2 + k_1^2)(E_0^2 k_1^2 + \mu^4)}{p_0 k_1^3} + \frac{4(\mu^4 - E_0^4)(p_0^2 k_1^2 - 2M^4 - p_0^4 - 3M^2 p_0^2)}{p_0 k_1 (E_0^2 + k_1^2)},$$

$$B = \frac{16E_0^2(E_0^4 + \mu^4)(p_0^2 + 2k_1^2) + 16p_0^2 k_1^2 (E_0^4 - \mu^4) - 4(E_0^2 + k_1^2)^2 (\mu^4 + 3E_0^4)}{(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1)^2} - \frac{4E_0^2}{k_1^2} \frac{(E_0^4 - 3\mu^4)(E_0^2 + k_1^2)^2 + 8\mu^4 p_0^2 k_1^2}{(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1)^2}.$$

Facendo la solita approssimazione su k_1 si ottiene per la sezione d'urto totale nel sistema in cui il protone positivo è in quiete la espressione:

$$(15) \quad \Phi_3^* = \frac{g^4}{128} \left\{ \frac{\gamma + 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})}{\gamma - 1} \right\},$$

essa, come Φ_1^* e Φ_2^* , diventa infinita per $\gamma \rightarrow 1$, invece per $\gamma \rightarrow \infty$ diventa:

$$\Phi_3^{*'} : \frac{g^4}{128} \approx 10^{-30} \text{ cm}^2.$$

Supponendo che l'energia cinetica del protone negativo sia di 2 GeV, si ottengono per le varie sezioni d'urto finora considerate i seguenti ordini di grandezza:

$$\Phi_1^* \approx 10^{-28} \text{ cm}^2, \quad \Phi_2^* \approx 10^{-29} \text{ cm}^2, \quad \Phi_3^* \approx 10^{-30} \text{ cm}^2.$$

Per lo stesso valore dell'energia cinetica del protone negativo A.M.M. hanno trovato che la sezione d'urto nel caso di mesoni scalari è dell'ordine $\approx 10^{-29} \text{ cm}^2$ quindi circa 10 volte più piccola di quella qui calcolata sommando Φ_1^* , Φ_2^* , Φ_3^* . Tale differenza può essere attribuita al diverso valore delle costanti di accoppiamento adoperate qui e nel lavoro di A.A.M.; si potrebbero allora ripetere le considerazioni dei citati Autori sulla ambiguità di scelta fra mesoni scalare e pseudoscalare e concludere che la produzione di mesoni vettoriali (come di quelli scalari) per annichilamento di protoni va messa in relazione con lo scattering dei mesoni da parte dei nucleoni.

Campo mesonico vettoriale carico con accoppiamento vettoriale.

Questo campo differisce da quello neutrale descritto dalle (7) e (8), che danno rispettivamente l'hamiltoniana dei mesoni liberi e quella della interazione, per il fatto che le variabili di campo Φ , Ψ e le canoniche coniugate π , Π

sono ora vettori con componenti complesse e per il fatto che nella hamiltoniana della interazione occorre distinguere la funzione d'onda del protone da quella del neutrone. Questo fatto porta a descrivere l'hamiltoniana dell'interazione con solo accoppiamento vettoriale nella seguente maniera:

$$H_1 = \int dV \left\{ g \Phi_N^* \left[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Psi}^* + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}^* \right] \Phi_P + \right. \\ \left. + g \Phi_P^* \left[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Pi}^* - \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} \right] \Phi_N \right\},$$

mentre l'hamiltoniana dei mesoni liberi si scrive:

$$H_0 = \mu \int dV \left\{ |\boldsymbol{\Psi}|^2 + |\boldsymbol{\pi}|^2 + \frac{1}{\mu^2} |\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}|^2 + |\boldsymbol{\Psi}|^2 + |\boldsymbol{\Pi}|^2 + \frac{1}{\mu^2} |\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}|^2 \right\},$$

ove gli integrali si intendono estesi a tutto lo spazio e si è posto $\hbar = 1$, $c = 1$.

Per passare dalla rappresentazione classica a quella quantistica, detto V un cubo di periodicità per le variabili di campo, si considerano i seguenti sviluppi in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \mathbf{q}_k \exp[-i\mathbf{k} \times \mathbf{x}], & \boldsymbol{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \mathbf{p}_k \exp[i\mathbf{k} \times \mathbf{x}], \\ \boldsymbol{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \mathbf{Q}_k \exp[-i\mathbf{k} \times \mathbf{x}], & \boldsymbol{\Pi} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \mathbf{P}_k \exp[i\mathbf{k} \times \mathbf{x}], \end{aligned}$$

e si impone che le componenti dei coefficienti degli sviluppi in serie siano operatori soddisfacenti alle relazioni di commutazione:

$$(16) \quad [p_{ki}, q_{k'j}]_- = [p_{ki}^*, q_{k'j}^*]_- = [P_{ki}, Q_{k'j}]_- = [P_{ki}^*, Q_{k'j}^*]_- = -i\delta_{kk'}\delta_{ij}, \\ (i, j = 1, 2, 3),$$

mentre le altre grandezze commutano.

Se si pone:

$$\begin{aligned} Q_k &= \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_k}} (a_k + b_k^*), & P_k &= \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{2\mu}} i(a_k^* - b_k), \\ q_k^{(r)} &= \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_k}} (a_k^{(r)} + b_k^{(r)*}), & p_k^{(r)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{2\mu}} i(a_k^{(r)*} - b_k^{(r)}), \end{aligned} \quad (r = 2, 3),$$

ove a_k^* , a_k sono matrici di produzione e annichilamento di mesoni positivi mentre b_k^* , b_k sono le analoghe per mesoni negativi, con i commutatori:

$$[a_k^{(r)}, a_k^{(r)*}]_- = [b_k^{(r)}, b_k^{(r)*}]_- = 1, \quad (r = 1, 2, 3)$$

mentre tutti gli altri commutatori si annullano, allora le relazioni di commutazione (16) vengono soddisfatte e l'hamiltoniana dei mesoni liberi si può

scrivere, indipendentemente dal cubo di periodicità scelto:

$$H_0 = \sum_k \sum_r \frac{1}{2} \varepsilon_k (a_k^{(r)*} a_k^{(r)} + a_k^{(r)} a_k^{(r)*} + b_k^{(r)*} b_k^{(r)} + b_k^{(r)} b_k^{(r)*}) .$$

Dall'hamiltoniana dell'interazione, ponendo $V=1$ e supponendo valida la conservazione della quantità di moto, si calcolano, con il solito significato dei simboli, gli elementi di matrice:

$$(17) \quad (H_I)_{N_n + k^+ \leftarrow P_m} = g \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_k}} \chi_n^* \alpha_1 \chi_m ,$$

$$(18) \quad (H_I)_{N_n + k^+ \leftarrow P_m} = - \frac{ig[\varepsilon_k(E_m - E_n) + \varepsilon_k^2 - \mu^2]}{k\sqrt{2\mu\varepsilon_k}} \chi_n^* \chi_m ,$$

$$(19) \quad (H_I)_{P_s^+ + k^- \leftarrow N_r} = g \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_k}} \chi_s^* \alpha_1 \chi_r ,$$

$$(20) \quad (H_I)_{P_s^+ + k^- \leftarrow N_r} = \frac{ig[\varepsilon_k(E_r - E_s) + \varepsilon_k^2 - \mu^2]}{k\sqrt{2\mu\varepsilon_k}} \chi_s^* \chi_r .$$

Il significato di tali elementi di matrice è evidente; è utile però notare che (17) e (19), a meno di un fattore di proporzionalità, sono identici all'elemento di matrice (9) per la produzione di un neutretto trasversale da parte di un nucleone. Inoltre gli elementi di matrice (18) e (20) differiscono solo per il segno, mentre ciascuno di essi differisce per un fattore di proporzionalità dall'elemento di matrice (10) relativo alla produzione da parte di un nucleone di un neutretto longitudinale.

In ogni caso gli stati intermedi attraverso i quali una coppia protone-antiprotone può annichilarsi con emissione di due mesoni carichi sono i seguenti:

1) Il protone positivo di impulso p_0 si trasforma in un neutrone di impulso $p_0 - k_1$, e in un mesone positivo di impulso k_1 . Nella transizione allo stato finale il neutrone dà luogo al mesone negativo di impulso $k_2 = -k_1$.

2) Il protone positivo di impulso p_0 si trasforma in neutrone di impulso $p_0 - k_2$ e in un mesone positivo di impulso k_2 . Nel passaggio allo stato finale è emesso dal neutrone il mesone negativo di impulso $k_1 = -k_2$.

Le energie negli stati intermedi sono rispettivamente $E_0 + E'$, $E_0 + E''$.

Annichilamento con emissione di due mesoni trasversali carichi.

Tenendo presenti le (17) e (19), gli elementi di matrice che intervengono nella (2) si possono scrivere:

$$H_{IA} = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_{k_1}}} g \chi'^* \alpha_1 \chi_0 , \quad H_{FI} = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_{k_2}}} g \chi^* \alpha_2 \chi' ,$$

$$H_{IIA} = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_{k_2}}} g \chi''^* \alpha_2 \chi_0 , \quad H_{FII} = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon_{k_1}}} g \chi^* \alpha_1 \chi'' .$$

Questi elementi di matrice sono $\sqrt{2}$ volte maggiori dei corrispondenti del processo di annichilamento con emissione di neutretti trasversali; pertanto tenendo presente che la densità degli stati finali per intervallo di energia dE è data da $E_0 k_1 d\Omega / (2\pi)^3$, la sezione d'urto differenziale per questo processo, ottenuta mediando sulle direzioni dello spin dei protoni e sommando sulle direzioni di polarizzazione dei mesoni, è 4 volte più grande della (11), che è la sezione d'urto differenziale per produzione di neutretti trasversali.

La sezione d'urto totale si ottiene da quella differenziale per integrazione sull'angolo φ da 0 a 2π , anzichè da 0 a π come nel caso neutro. Ciò perchè in questo caso invertire il ruolo di k_1 con quello di k_2 significa introdurre un nuovo stato, dato il diverso segno della carica dei mesoni. Quindi la sezione d'urto totale è 8 volte maggiore della Φ_1 e perciò la sezione d'urto totale nel sistema ove il protone positivo è in quiete ha la forma:

$$\Phi_1^* = \frac{\pi E_0^2}{8(\gamma + 1)} \left\{ -\frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right\},$$

ove si è fatta la solita approssimazione $k_1 \simeq M\sqrt{(\gamma + 1)/2}$. Naturalmente si può dire per il suo andamento e per gli ordini di grandezza quanto è stato detto per Φ_1^* .

Annichilamento con emissione di due mesoni carichi longitudinali.

Per questo processo gli elementi di matrice che intervengono nella (2) si possono scrivere tenendo presenti (18) e (20):

$$\begin{aligned} H_{IA} &= -\frac{ig(E_0^2 - E_0 E' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi'^* \chi_0, & H_{FI} &= \frac{ig(3E_0^2 + E_0 E' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi^* \chi', \\ H_{IIA} &= -\frac{ig(E_0^2 - E_0 E'' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi''^* \chi_0, & H_{FII} &= \frac{ig(3E_0^2 + E_0 E'' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi^* \chi''. \end{aligned}$$

La sezione d'urto differenziale che vi corrisponde, ottenuta mediando sulle direzioni degli spin dei protoni è data dalla espressione:

$$d\Phi_5 = \frac{g^4 k_1^5 (2E_0^2 + k^2)^2}{2\pi^2 \mu^2 E_0^2} \frac{p_0 \cos^2 \theta [E_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta] \sin \theta}{[(E_0^2 + k_1^2)^2 - (2p_0 k_1 \cos \theta)^2]^2} d\theta d\varphi.$$

Integrando la precedente espressione per $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ si ha la

sezione d'urto totale nel sistema del baricentro:

$$\Phi_5 = \frac{g^4 k_1 (k_1^2 + 2E_0^2)^2}{16\pi\mu^2 E_0^2 p_0} \left\{ \frac{3(E_0^4 + k_1^4) + 2k_1^2(E_0^2 - 4p_0^2)}{(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{3(E_0^2 + k_1^2)^2 - 4E_0^2 k_1^2}{4(E_0^2 + k_1^2) p_0 k_1} \log \frac{M^2 + (p_0 + k_1)^2}{M^2 + (p_0 - k_1)^2} \right\}.$$

Facendo su k_1 la solita approssimazione, nel sistema di riferimento ove il protone positivo è fermo, la sezione d'urto totale ha la forma:

$$\Phi_5^* = \frac{9g^4 M^2 (\gamma + 1)^2}{32\pi\mu^2} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})}{\gamma + 1} \right\};$$

essa ha lo stesso andamento della sezione d'urto per emissione di due neutretti longitudinali, precisamente si ha:

$$72 \Phi_2^* = \Phi_5^*.$$

Annichilamento con emissione di due mesoni carichi uno longitudinale e uno trasversale.

Gli elementi di matrice in questo caso sono dati dalle espressioni:

$$H_{1A} = \sqrt{\frac{\mu}{2E_0}} g \chi'^* \alpha_1 \chi_0, \quad H_{FI} = \frac{ig(3E_0^2 + E_0 E' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi^* \chi', \\ H_{11A} = -\frac{ig(E_0^2 - E_0 E'' - \mu^2)}{k_1 \sqrt{2\mu E_0}} \chi''^* \chi_0, \quad H_{FII} = \sqrt{\frac{\mu}{2E_0}} g \chi^* \alpha_1 \chi''.$$

La sezione d'urto differenziale ottenuta mediando sulle direzioni degli spin dei protoni e sommando sulle direzioni di polarizzazione del mesone trasversale si scrive:

$$d\Phi_6 = \frac{-g^4}{256\pi E_0^2 p_0 k_1} \{ (16E_0^2 p_0^2 \sin^2 \theta - 32E_0^4)(A - B + 1) + \\ + 16E_0^2(A^2 - B^2 + 2A + 2B)p_0 k_1 \cos \theta - 4p_0^2 k_1^2(1 + \cos^2 \theta)(A + B)^2 - \\ - 4[E_0^4 + M^4 + M^2 p_0^2(1 + \cos^2 \theta) + 4p_0^4 \cos^2 \theta](A - B)^2 \} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

essendo:

$$A = \frac{\mu^2 - 3E_0^2}{E_0^2 + k_1^2 - 2p_0 k_1 \cos \theta}, \quad B = \frac{E_0^2 - \mu^2}{E_0^2 + k_1^2 + 2p_0 k_1 \cos \theta}.$$

Integrando per $0 \leq \theta \leq \pi$ e per $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ si ottiene per la sezione d'urto

totale nel sistema del baricentro la espressione:

$$\Phi_6 = \frac{g^4}{128 p_0 k_1} \left\{ -\frac{64}{3} p_0^2 - 64 k_1^2 - \frac{4(E_0^2 + k_1^2)^2 (E_0^2 + 3p_0^2) (4E_0^4 + k_1^4 + 2E_0^2 k_1^2)}{E_0^2 k_1^2 [(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2]} + \right. \\
+ \frac{16 p_0^2 k_1^4 - 12 k_1^4 (E_0^2 + k_1^2)^2}{E_0^2 [(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2]} + \\
+ \frac{32(E_0^2 + 3p_0^2) E_0^2 p_0^2 + 16(2E_0^4 + k_1^4 + 2E_0^2 k_1^2) (2k_1^2 + p_0^2)}{(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2} + \\
+ \frac{32 p_0^2 k_1^4 - 4(E_0^2 + k_1^2)^2 (4E_0^2 + 6k_1^2)}{(2p_0 k_1)^2 - (E_0^2 + k_1^2)^2} + \frac{16(E_0^2 + k_1^2)^2}{k_1^2} + \\
+ \left[\frac{8k_1^2 (3k_1^2 + 2E_0^2) + 16p_0^2 (E_0^2 + k_1^2)}{p_0 k_1} - \frac{4(E_0^2 + k_1^2) [(E_0^2 + k_1^2)^2 + E_0^4 + 3E_0^2 p_0^2]}{p_0 k_1^3} - \right. \\
\left. - \frac{(E_0^2 + k_1^2) (6E_0^4 + 3k_1^4 + 7E_0^2 k_1^2 + 7p_0^2 k_1^2 + 6E_0^2 p_0^2)}{E_0^2 p_0 k_1} - \frac{4k_1^2 (3E_0^2 p_0^2 - 2E_0^2 k_1^2 - 4E_0^4 + p_0^2 k_1^2)}{p_0 k_1 (E_0^2 + k_1^2)} \right] \times \\
\left. \times \log \frac{M^2 + (p_0 + k_1)^2}{M^2 + (p_0 - k_1)^2} \right\}.$$

Con la solita approssimazione su k_1 la sezione d'urto totale nel sistema ove il protone positivo è in quiete è data da:

$$\Phi_6^* = \frac{g^4}{64} \left\{ \frac{45\gamma^2 + 64\gamma + 11}{3\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{23\gamma^2 + 20\gamma - 3}{\gamma^2 - 1} \log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right\},$$

la quale diverge per $\gamma \rightarrow 1$ e per $\gamma \rightarrow \infty$.

La sezione d'urto totale che si ottiene quando l'energia cinetica del protone negativo è di 2 GeV e si ha emissione di mesoni vettoriali carichi è dell'ordine di 10^{-26} cm^2 . Per la stessa energia del protone negativo A.A.M. hanno trovato nel caso scalare e pseudoscalare sezioni d'urto rispettivamente dell'ordine 10^{-27} cm^2 , 10^{-29} cm^2 ; tale ambiguità nei valori delle due sezioni d'urto viene messa in relazione con lo scattering dei mesoni da parte dei nucleoni e in tal caso il valore della sezione d'urto scalare sarebbe il più attendibile; oppure si considera l'emissione dei mesoni da parte della coppia protone-anti-protone come un tipo di produzione di mesoni e in tal caso la sezione d'urto per mesoni pseudoscalari sarebbe la più ragionevole.

Dato che qui si adopera per la costante di accoppiamento un valore più alto di quello adoperato da A.A.M. si può affermare che, nel range di energia considerato, le sezioni d'urto dell'emissione di mesoni vettoriali pseudoscalari sono dello stesso ordine di grandezza. Invece alle alte energie del protone negativo c'è una notevole differenza fra i valori delle sezioni d'urto vettoriale e scalare pseudoscalare.

Però tale differenza non è da giudicare significativa per il fatto che alle alte energie probabilmente il calcolo perturbativo diventa ancor più inadeguato

che alle basse energie: è probabile invece che alle alte energie siano maggiormente significativi i calcoli nella approssimazione « statistica » alla Fermi che come abbiamo detto ci proponiamo di fare.

Porgo i più sentiti ringraziamenti al prof. BRUNO FERRETTI per gli utili consigli datimi sul presente lavoro.

SUMMARY

The probability of proton-antiproton annihilation into two charged or neutral vectorial mesons has been studied. The cross section for meson production behaves as $1/(\gamma - 1)$ for $\gamma \rightarrow 1$ (γ being the energy of the negative proton divided by its rest energy in the system where the positive proton is at rest), while for $\gamma \rightarrow \infty$ the longitudinal part becomes infinite and the transversal part infinitesimal. For an energy of the negative proton of 2 GeV the cross section is $\approx 10^{-28} \text{ cm}^2$ for emission of neutral mesons and $\approx 10^{-28} \text{ cm}^2$ for charged mesons.

Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni.

S. ALBERTONI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

M. CUGIANI

Istituto di Matematica dell'Università - Milano

(ricevuto il 7 Agosto 1951)

Riassunto. — Il seguente lavoro ha come scopo principale quello di studiare, nell'ambito della teoria delle distribuzioni di L. SCHWARTZ, il problema di una trasformazione di variabili. In particolare si dimostrano alcune formule relative alle funzioni « singolari » di Dirac di uso frequente nelle teorie quantistiche.

1. — Prendendo lo spunto dall'opera di L. SCHWARTZ sulle distribuzioni, ci siamo proposti di affrontare il problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni, problema che appare di fondamentale importanza in molte questioni di Fisica Teorica ⁽¹⁾. Particolare attenzione si porterà sull'impiego delle funzioni « singolari » di Dirac, in relazione alle quali vengono anche dati parecchi esempi utili per i calcoli in meccanica quantistica.

In questo saggio ci siamo proposti di trattare più particolarmente il caso di una sola variabile, ripromettendoci di completare eventualmente lo studio del caso di più variabili in saggi successivi.

⁽¹⁾ Nel seguito ci riferiremo spesso all'opera di L. SCHWARTZ: *Théorie des Distributions*, » *Actualités Scientifiques et Industrielles* », nn. 1091 e 1122 (Hermann, Paris, 1950-51). Nella prefazione di tale opera, che sarà da noi citata sotto la sigla L.S., l'Autore stesso accenna all'importanza del problema che ci accingiamo a trattare, anzi lo include in una serie di vari argomenti che egli mostra di considerare come essenziali per una completa trattazione della teoria delle distribuzioni (vedi L.S., vol. I, pag. 12).

Possiamo anzitutto precisare i termini della questione nella forma seguente.

D'accordo collo SCHWARTZ definiremo una distribuzione T come una forma lineare continua sullo spazio (\mathcal{D}) delle funzioni φ indefinitamente derivabili e nulle al di fuori di un compatto (vedi L.S., vol. I, pag. 24).

Naturalmente lo spazio (\mathcal{D}) sarà munito della pseudo topologia definita nel loco citato.

Sia ora assegnata una distribuzione T su R^1 , cioè operante sulle funzioni $\varphi \in (\mathcal{D})$ di una sola variabile x , distribuzione che per maggior chiarezza indicheremo col simbolo T_x .

Fissata una funzione $u = h(x)$, reale della variabile reale x , ci possiamo chiedere: sotto quali ipotesi si può attribuire un significato, ed eventualmente quale, al simbolo $(^2)$

$$T_u \{ \varphi(x) \},$$

ove con T_u indicheremo il risultato della sostituzione $u = h(x)$ sulla T_x originaria?

Naturalmente il significato da attribuire al nuovo simbolo dovrà esser tale che, nel caso in cui T_x sia una funzione $f(x)$, sommabile su ogni compatto, la definizione data conduca ai medesimi risultati cui si perviene applicando la sostituzione nel senso ordinario. Supponiamo dapprima che si passi dalla x alla u mediante un omeomorfismo indefinitamente differenziabile, quale quello ad esempio, stabilito dalle relazioni:

$$(1) \quad u = kx; \quad x = \frac{1}{k} u, \quad (\bar{k} \text{ reale, diverso da zero}).$$

Allora nel caso che la nostra T_x si riduca ad una $f(x)$ avremo:

$$T_x \{ \varphi(x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad (\varphi \in (\mathcal{C})) \quad (^3),$$

$$T_u \{ \varphi(x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\varphi(u/k)}{|k|} du = T_u \left\{ \frac{\varphi(u/k)}{|k|} \right\} = T_x \left\{ \frac{\varphi(x/k)}{|k|} \right\}.$$

Siamo allora indotti ad adottare, nel caso in cui T_x sia una distribuzione qualunque, come definizione del simbolo $T_u \{ \varphi(x) \}$ (dove $\varphi \in (\mathcal{D})$) la relazione:

$$(2) \quad T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \left\{ \frac{\varphi(u/k)}{|k|} \right\} = T_x \left\{ \frac{\varphi(x/k)}{|k|} \right\},$$

(²) Naturalmente il valore da attribuire al simbolo $T_u \{ \varphi(x) \}$ è ben diverso dal valore da attribuire al simbolo $T_u \{ \varphi(u) \}$ che non differisce sostanzialmente da $T_x \{ \varphi(x) \}$ inquantochè quest'ultimo non è evidentemente legato alla scelta del particolare simbolo che rappresenta la variabile indipendente.

(³) Col simbolo (\mathcal{C}) indichiamo lo spazio delle funzioni continue su R^1 e nulle all'infuori di un compatto.

e la T_u così definita risulta allora una distribuzione $\in (\mathcal{D}')$, ove (\mathcal{D}') è lo spazio duale di (\mathcal{D}) .

La definizione si generalizza ovviamente al caso in cui la corrispondenza fra u ed x sia di una natura più generale. Supponiamo che $u = h(x)$ sia una funzione continua, definita su tutto l'asse reale, univocamente invertibile e tale che l'inversa $x = g(u)$ sia indefinitamente differenziabile.

Avremo allora, nel caso che la distribuzione T_x si riduca ad una $f(x)$:

$$T_u \{ \varphi(x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \varphi(g(u)) |g'(u)| du \quad (4),$$

e quindi:

$$T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \{ \varphi(g(u)) \cdot |g'(u)| \} = T_u \{ \Phi(u) \},$$

ove $\Phi(u) = \varphi(g(u)) \cdot |g'(u)|$.

Siamo allora indotti a generalizzare, nel caso di una T_x qualsiasi, la formula di definizione (2) nella seguente:

$$(3) \quad T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \{ \Phi(u) \}.$$

La funzione $\Phi(u)$ risulta evidentemente continua, indefinitamente differenziabile, e nulla al di fuori di un compatto; inoltre scelta una successione di funzioni $\varphi_n \in (\mathcal{D})$, nulle al di fuori di un compatto fisso ed ivi convergenti uniformemente verso zero, insieme a tutte le loro derivate, secondo la pseudo topologia di (\mathcal{D}) , fissata in L.S. (vol. I, pag. 24), le corrispondenti $\Phi_n(u)$ risulteranno pure nulle al di fuori di un compatto fisso, ed ivi uniformemente convergenti verso zero, secondo la pseudo topologia di (\mathcal{D}_u) ⁽⁵⁾. Dal fatto che le φ_n tendono a zero segue dunque che le $T_u \{ \Phi_n(u) \} \rightarrow 0$ e quindi anche le $T_u(\varphi_n(x)) \rightarrow 0$.

La T_u , evidentemente lineare, risulta perciò anche continua su (\mathcal{D}_x) . Essa è una nuova distribuzione su (\mathcal{D}_x) .

Come esempio di applicazione dei concetti svolti elenchiamo alcuni risultati, che ci sono sembrati più interessanti.

a) Sia $u = x - a$; indichiamo col nome di misure le forme lineari continue su (\mathcal{C}) e sia δ_x la misura di Dirac, formata dalla massa +1 nell'origine (vedi L.S., vol. I, pag. 19). Avremo allora:

$$\delta_{x-a} \{ \varphi(x) \} = \delta_u \left\{ \varphi(u+a) \frac{d(u+a)}{du} \right\} = \delta_u \{ \varphi(u+a) \} = \varphi(a).$$

(4) Si osservi che la $g'(u)$ ha sempre lo stesso segno per u che varia fra $-\infty$ e $+\infty$.

(5) Indicheremo con (\mathcal{D}_u) lo spazio delle funzioni $\varphi(u)$, per distinguerlo dallo spazio delle $\varphi(x)$. Quest'ultimo, indicato di solito con (\mathcal{D}) , verrà indicato con (\mathcal{D}_x) quando sia necessario evitare il pericolo di equivoci.

Il simbolo δ_{x-a} si può dunque interpretare come una massa + 1 nel punto a .

b) Sia ancora $u = x - a$. Ricordando la formula di derivazione delle distribuzioni: $T'_x\{\varphi(x)\} = -T_x\{\varphi'(x)\}$ (vedi L.S., vol. I, pag. 34), potremo scrivere:

$$\delta'_{x-a}\{\varphi(x)\} = -\delta_{x-a}\{\varphi'(x)\} = -\varphi'(a),$$

δ'_{x-a} si può interpretare come una doppietta nel punto a .

c) Sia $u = \text{Sh } x$. Avremo allora:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Sh } x}\{\varphi(x)\} &= \delta_u\left\{\varphi(\text{Sett Sh } u) \frac{d \text{ Sett Sh } u}{du}\right\} = \\ &= \delta_u\left\{\varphi(\text{Sett Sh } u) \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right\} = \varphi(0) = \delta_x\{\varphi(x)\},\end{aligned}$$

onde si trae che: $\delta_{\text{Sh } x} = \delta_x$.

d) Sia $u = ax$ (a reale $\neq 0$). Avremo:

$$\delta_{ax}\{\varphi(x)\} = \delta_u\left\{\frac{\varphi(u/a)}{|a|}\right\} = \frac{1}{|a|}\varphi(0),$$

e quindi:

$$\delta_{ax} = \frac{1}{|a|} \delta_x.$$

e) Sia $u = \sqrt[3]{x}$ (del radicale si consideri la determinazione reale). Avremo allora:

$$\delta_{\frac{x}{\sqrt[3]{x}}}\{\varphi(x)\} = \delta_u\{\varphi(u^3) \cdot 3u^2\} = 0,$$

e quindi:

$$\delta_{\frac{x}{\sqrt[3]{x}}} = 0.$$

Osserviamo che la T_{x-a} , come viene da noi definita coincide sostanzialmente colla traslata $\tau_a T$ definita in L.S. (vol. I, pag. 55).

Facciamo notare poi che il risultato d) costituisce una interpretazione della formula, usata in Meccanica ondulatoria: $\delta(ax) = a^{-1} \cdot \delta(x)$ per $a > 0$, estendendone inoltre la validità al caso $a < 0$ ⁽⁶⁾.

L'estensione della precedente definizione al caso di una T definita su R^2 si presenta ovvia.

(6) La formula ricordata si trova in P. A. M. DIRAC: *Quantum Mechanics*, III ed. (Oxford Press, 1947), pag. 60, formula (8).

Infatti detta T_{x_1, x_2} una tale distribuzione, ed assegnata una coppia di funzioni $u_i = h_i(x_1, x_2)$ (dove $i = 1, 2$) univocamente invertibili in tutto il piano in $x_i = g_i(u_1, u_2)$ (dove $i = 1, 2$) ed inoltre tali che le g_i risultino indefinitamente differenziabili rispetto ad u_1 e ad u_2 , potremo porre:

$$(4) \quad T_{u_1, u_2} \{ \varphi(x_1, x_2) \} = T_{u_1, u_2} \left\{ \varphi(g_1, g_2) \left| \frac{d(g_1, g_2)}{d(u_1, u_2)} \right| \right\}.$$

La T_{u_1, u_2} così definita risulta, per le ipotesi fatte, una forma lineare continua su (\mathcal{D}_{x_1, x_2}) , come si può dimostrare facilmente in modo analogo a quello seguito nel caso di una variabile.

La definizione si generalizza subito per il caso di un R^n qualsiasi.

2. - Ci proponiamo ora di considerare il caso in cui la sostituzione $u = h(x)$ non soddisfi alle condizioni previste al numero precedente. Cominciamo coll'esaminare un caso particolare che però illustra sufficientemente l'argomento anche nei suoi aspetti più generali. Sia, ad esempio, $u = x^2 - a^2$ e supponiamo dapprima che la T_x originaria si riduca ad una $f(x)$ sommabile su ogni compatto e limitata.

Avremo allora:

$$\begin{aligned} T_u \{ \varphi(x) \} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \varphi(x) dx = \int_{+\infty}^{-a^2} f(u) \varphi(-\sqrt{u+a^2}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{u+a^2}} du + \\ &+ \int_{-a^2}^{+\infty} f(u) \varphi(+\sqrt{u+a^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+a^2}} du = \int_{-a^2}^{+\infty} f(u) \frac{\varphi(\sqrt{u+a^2}) + \varphi(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}} du. \end{aligned}$$

(Gli integrali sono tutti convergenti per l'ipotesi fatta sulla $f(x)$). Definiamo ora una funzione $\varphi^*(+\sqrt{u+a^2})$ la quale è nulla per $u < -a^2$ e coincide con $\varphi(+\sqrt{u+a^2})$ per $u \geq -a^2$, ed analogamente definiamo $\varphi^*(-\sqrt{u+a^2})$.

Siamo allora indotti a scrivere:

$$(5) \quad T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \left\{ \frac{\varphi^*(\sqrt{u+a^2}) + \varphi^*(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}} \right\} = T_u \{ \Phi(u) \},$$

ove

$$\Phi(u) = \frac{\varphi^*(\sqrt{u+a^2}) + \varphi^*(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}},$$

e saremmo quindi tentati di estendere la definizione che scaturisce dalla (5) al caso di una T_x qualunque. Osserviamo però che la funzione $\Phi(u)$ non sarà in generale continua nel punto $u = -a^2$ e perciò il simbolo $T_u \{ \Phi(u) \}$ non avrà in generale alcun significato.

Se però noi supponiamo, ad esempio, che la distribuzione originaria T_x sia una misura, allora imponendo alla $\varphi(x)$ (che per ora supporremo appartenente allo spazio (\mathcal{D})) la sola condizione di annullarsi nell'origine, ne risulterà in conseguenza la continuità della $\Phi(u)$, onde la $T_u\{\Phi(u)\}$ verrà ad essere definita, e con essa, in base alla (5) il significato da attribuire al simbolo $T_u\{\varphi(x)\}$.

Infatti dall'ipotesi $\varphi(0) = 0$ segue

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -a^2+} \Phi(u) &= \lim_{u \rightarrow -a^2+} \frac{\varphi(\sqrt{u+a^2}) + \varphi(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}} = \\ &= \lim_{u \rightarrow -a^2+} \frac{1}{2\sqrt{u+a^2}} \{ \varphi'(\sqrt{u+a^2}) - \varphi'(-\sqrt{u+a^2}) \} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow -a^2+} \frac{1}{\sqrt{u+a^2}} \{ \varphi'(\sqrt{u+a^2}) - \varphi'(-\sqrt{u+a^2}) \} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} \varphi'(x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-} \varphi'(x) = \frac{1}{2} \{ \varphi'(0+) - \varphi'(0-) \} = 0, \end{aligned}$$

($\varphi'(\pm\sqrt{u+a^2})$ sta a rappresentare la derivata di $\varphi(\pm\sqrt{u+a^2})$ rispetto all'argomento $\pm\sqrt{u+a^2}$).

D'altra parte è chiaro che, detto (\mathcal{H}) l'iperpiano contenuto in (\mathcal{D}_x) delle φ soddisfacenti alla condizione lineare $\varphi(0) = 0$, la T_u così definita risulta ivi una forma lineare e dimostreremo subito che essa risulta anche continua sull'iperpiano stesso.

Infatti facciamo vedere che se una successione di $\varphi_n \in (\mathcal{H})$ tendono uniformemente a zero in (\mathcal{D}_x) colla pseudo-topologia propria di questo spazio, le corrispondenti $\Phi_n(u)$ tendono anch'esse uniformemente a zero nello spazio (\mathcal{C}_u) colla pseudo-topologia che gli è propria. Osserviamo anzitutto che se l'origine non appartiene al compatto fisso K_x in cui le φ_n possono essere diverse da zero, allora la nostra affermazione è evidente. Se poi l'origine appartiene al supporto di una delle φ , quest'ultima si può rappresentare in un intorno destro o sinistro dell'origine rispettivamente colle due formule:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\theta_1 x) = x\varphi'(\theta_1 x) \quad (x > 0)$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\theta_2 x) = x\varphi'(\theta_2 x) \quad (x < 0)$$

$$(0 < \theta_i < 1).$$

Per la uniforme convergenza a zero delle φ_n e delle loro derivate sarà per n abbastanza grande e qualunque x

$$|\varphi'_n(x)| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ positivo arbitrario}).$$

Allora per le corrispondenti $\Phi_n(u)$, a destra del punto $-a^2$ e all'interno del compatto K_u , corrispondente al compatto K_x , sarà

$$|\Phi_n(u)| = \left| \frac{\varphi_n(\sqrt{u+a^2}) + \varphi_n(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}} \right| = \\ = \left| \frac{\sqrt{u+a^2}}{2\sqrt{u+a^2}} \varphi'(\theta_1 \sqrt{u+a^2}) - \frac{\sqrt{u+a^2}}{2\sqrt{u+a^2}} \varphi'(-\theta_2 \sqrt{u+a^2}) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon,$$

da cui segue l'asserto. Sotto le ipotesi fatte la T_u , definita dalla (5), risulta quindi determinata come forma lineare continua su $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_x)$.

Le precedenti considerazioni si riferiscono al caso di una misura T_x generica. Quando però si pensi ad una distribuzione T_x tale che il punto $x = -a^2$ risulti esterno al suo supporto, allora si potrà interpretare la (5) in modo che la T_u risulti definita e continua su tutto (\mathcal{D}_x) . Rimandiamo all'Oss. IV del numero successivo la considerazione di questo caso particolare e ritorniamo adesso a trattare il caso di una misura T_x sul cui supporto non si fanno particolari ipotesi.

In ogni caso facciamo vedere che è possibile prolungare la T_u in una forma lineare, chiamiamola \bar{T}_u , continua su tutto (\mathcal{D}_x) e coincidente con T_u su (\mathcal{H}) . La \bar{T}_u risulterà in generale indeterminata (salvo il caso precedentemente segnalato e per cui vedi la già citata oss. IV) e verrà da noi definita in modo tale che due determinazioni distinte di essa differiranno per un multiplo della δ .

Scegliamo anzitutto una funzione $\varphi_0(x) \in (\mathcal{D}_x)$, non appartenente ad (\mathcal{H}) e tale che $\varphi_0(0) = 1$.

Fissiamo arbitrariamente il valore di $\bar{T}_u\{\varphi_0\}$ tutte le volte che, come accadrà in generale, risulti indeterminato in base alla (5) il valore da attribuire a $T_u\{\varphi_0\}$ (ed assumeremo invece $\bar{T}_u\{\varphi_0\} = T_u\{\varphi_0\}$ nel caso particolare prima segnalato).

Potremo allora definire la \bar{T}_u come forma lineare su (\mathcal{D}_x) . Infatti se $\varphi \in (\mathcal{D}_x)$ non appartiene ad (\mathcal{H}) si potrà scrivere:

$$\varphi(x) = \lambda \varphi_0(x) + \chi(x), \quad \text{ove} \quad \lambda = \varphi(0),$$

e si ha $\chi \in (\mathcal{H})$ in quanto $\chi(0) = \varphi(0) - \lambda \varphi_0(0) = 0$, e la \bar{T}_u risulterà allora così definita su (\mathcal{D}_x) da:

$$(6) \quad \bar{T}_u\{\varphi(x)\} = \lambda \bar{T}_u\{\varphi_0(x)\} + T_u\{\chi(x)\}.$$

Tale \bar{T}_u , evidentemente lineare su (\mathcal{D}_x) , è ivi pure continua. Infatti, se una successione $\varphi_n \rightarrow 0$ in (\mathcal{D}_x) , anche i corrispondenti $\lambda_n \rightarrow 0$ e così pure $\chi_n \rightarrow 0$, ed essendo notoriamente la T_u continua su (\mathcal{H}) segue l'asserto.

Risulta infine che la differenza fra due determinazioni \bar{T}_u^1 e \bar{T}_u^2 della T_u

sarà data da:

$$\lambda \bar{T}_u^1(\varphi_0) - \lambda \bar{T}_u^2(\varphi_0) = \lambda(\bar{T}_u^1(\varphi_0) - \bar{T}_u^2(\varphi_0)) = \lambda C = \varphi(0) \cdot C,$$

$$\text{onde } \bar{T}_u^1 - \bar{T}_u^2 = C\delta.$$

3. - Alle considerazioni svolte nel numero precedente si possono far seguire alcune osservazioni.

Osservazione I. - Se la T_x iniziale anzichè una misura fosse più in generale una distribuzione (*) di ordine ≤ 1 , allora perchè la T_u risulti definita dalla (5) occorrerà che la $\Phi(u)$ risulti continua insieme alla sua derivata prima. Perciò le $\varphi(x)$ per cui la T_u risulterà definita saranno quelle soddisfacenti alle condizioni:

$$(7) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0.$$

Infatti sappiamo già che sotto queste condizioni risulta per le corrispondenti $\Phi(u)$:

$$\lim_{u \rightarrow -a^2+} \Phi(u) = 0,$$

e si prova analogamente che, soddisfatte le (7), si ha anche:

$$\lim_{u \rightarrow -a^2+} \Phi'(u) = 0.$$

Infatti si ha:

$$\Phi'(u) = \frac{\sqrt{u+a^2}(\varphi'(\sqrt{u+a^2}) - \varphi'(-\sqrt{u+a^2})) - (\varphi(\sqrt{u+a^2}) + \varphi(-\sqrt{u+a^2}))}{4(u+a^2)^{3/2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -a^2+} \Phi'(u) &= \lim_{u \rightarrow -a^2+} \frac{\varphi''(\sqrt{u+a^2}) + \varphi''(-\sqrt{u+a^2})}{12\sqrt{u+a^2}} = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{u \rightarrow -a^2+} \{\varphi'''(\sqrt{u+a^2}) - \varphi'''(-\sqrt{u+a^2})\} = \frac{1}{12} \{\varphi'''(0+) - \varphi'''(0-)\} = 0. \end{aligned}$$

Con un ragionamento analogo a quello svolto precedentemente si può dimostrare che sul sottospazio (\mathcal{H}) definito dalle (7) la T_u , evidentemente lineare, risulta anche continua.

Infatti se $\varphi_n(x) \in (\mathcal{H})$ è una successione di funzioni tendenti a zero in (\mathcal{D}_x) , le corrispondenti $\Phi_n(u)$ tendono a zero in (\mathcal{D}_u^1) . La tendenza a zero delle

(*) Per distribuzione di ordine $\leq m$ intendiamo una forma lineare continua sullo spazio (\mathcal{D}^m) delle funzioni $\varphi(x)$ continue colle loro prime m derivate, e nulle all'infuori di un compatto (vedi L.S., vol. I, pag. 21).

$\Phi_n(u)$ è chiara per quanto si è visto precedentemente, e nei riguardi delle $\Phi'_n(u)$ osserviamo anzitutto che per le φ_n e φ'_n valgono gli sviluppi (per $x > 0$):

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + x\varphi'_n(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''_n(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''_n(\theta_1x) = \frac{x^3}{3!}\varphi'''_n(\theta_1x),$$

$$\varphi'_n(x) = \frac{x^2}{2!}\varphi''_n(\theta_2x),$$

e per $x < 0$:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^3}{3!}\varphi'''_n(\theta_3x); \quad \varphi'_n(x) = \frac{x^2}{2!}\varphi''_n(\theta_4x).$$

Ricordando che per n abbastanza grande si ha per qualunque x :

$$|\varphi'''_n(x)| < \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0 \text{ arbitrario})$$

ne segue:

$$|\Phi'_n(u)| \leq \frac{(\sqrt{u + a^2})^3}{4(\sqrt{u + a^2})^3} 4\varepsilon = \varepsilon.$$

La T_u risulta così definita come forma lineare continua su $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_x)$ onde si potrà prolungarla su tutto (\mathcal{D}_x) in una forma \bar{T}_u , coincidente con T_u su (\mathcal{H}) e definita a meno di una combinazione lineare di δ , δ' , e δ'' .

Più in generale, se la T_x originaria era una distribuzione di ordine $\leq m$ la T_u risulterà definita su un sottospazio (\mathcal{H}) a cui appartengono le $\varphi \in (\mathcal{D}_x)$ soddisfacenti alle condizioni:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(2m)}(0) = 0;$$

tale T_u appare prolungabile su tutto (\mathcal{D}_x) in una \bar{T}_u definita a meno di combinazioni lineari di δ , δ' , ..., $\delta^{(2m)}$.

Il procedimento però non appare generalizzabile al caso in cui la T_x sia una distribuzione qualsiasi.

Osservazione II. - Tornando al caso in cui la T_x originaria sia una misura, è evidente che i ragionamenti svolti per definire la T_u e la generalizzata \bar{T}_u valgono anche nell'ipotesi meno restrittiva che le $\varphi(x)$ su cui opera la T_u anziché allo spazio (\mathcal{D}_x) appartengano allo spazio (\mathcal{D}_x^1) . La T_u appare perciò in questo caso come una forma lineare continua su (\mathcal{D}_x^1) e pertanto una distribuzione di ordine ≤ 1 .

Vogliamo qui dimostrare come la T_u , continua su (\mathcal{D}_x^1) non sia tale invece su (\mathcal{C}_x) , come cioè essa risulti continua di ordine non minore di 1.

Si consideri infatti la successione di φ_n così definite:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\leq 0, & \text{per: } x < 0, \\ \varphi_n(x) &= x^{(n+1)/n} \exp \left[-\frac{1}{2} n x^2 \right] & \text{per: } 0 \leq x < \frac{n+1}{n}, \\ \varphi_n(x) &= \frac{n^2}{4} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(n+1)/n} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n} \left(\frac{n+3}{n} - x \right)^2 \right], \\ & & \text{per: } \frac{n+1}{n} \leq x < \frac{n+3}{n}, \\ \varphi_n(x) &= 0, & \text{per: } x \geq \frac{n+3}{n}. \end{aligned}$$

Esse sono finite, continue insieme alle loro derivate prime e si annullano nell'origine insieme alle derivate stesse. Tendono a zero uniformemente, il che non accade delle loro derivate. Costituiscono quindi un esempio di funzioni tendenti a zero secondo la topologia di (\mathcal{C}_x) ma non secondo quella di (\mathcal{D}_x^1) pur appartenendo allo spazio (\mathcal{D}_x^1) .

Orbene si vede facilmente che le corrispondenti $\Phi_n(u)$ non tendono a zero secondo la topologia di (\mathcal{C}_u) . Infatti le $\Phi_n(u)$ sono definite da:

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2} (u + a^2)^{1/2n} \exp \left[-\frac{1}{2} n(u + a^2) \right],$$

nell'intervallo

$$-a^2 \leq u < \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 - a^2,$$

e possiedono in tale intervallo un massimo, precisamente nel punto $u = (1/n^2) - a^2$, la cui ordinata tende ad $1/2$ per $n \rightarrow \infty$.

Analoghe considerazioni si possono fare se la T_x originaria è una distribuzione di ordine $\leq m$, nel qual caso la T_u appare come una distribuzione di ordine $\leq 2m+1$.

Osservazione III. — Le considerazioni precedenti sono sempre state rivolte al caso $u = x^2 - a^2$ ma esse possono essere estese facilmente al caso $u = P_{n+1}(x)$ ove P_{n+1} è un polinomio in x di grado $n+1$, la cui derivata possieda n zeri semplici. Allora la u presenterà n punti estremanti (x_1, u_1) $(x_2, u_2) \dots (x_n, u_n)$ e sarà invertibile negli intervalli:

$$(-\infty, x_1)(x_1, x_2) \dots (x_{n-1}, x_n)(x_n, +\infty),$$

in $n+1$ rami di equazioni:

$$x = X_1(u), \quad x = X_2(u), \quad \dots, \quad x = X_{n+1}(u).$$

Allora, supposto al solito che T_x sia una misura, e posto:

$$\varphi^*(X_i(u)) = \varphi(X_i(u)) \quad \text{nell'intervallo sull'asse } u \\ \text{ove la } X_i(u) \text{ è definita,}$$

$$\varphi^*(X_i(u)) = 0 \quad \text{altrove,}$$

possiamo definire la T_u come segue:

$$(8) \quad T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \left\{ \sum_i \varphi^*(X_i(u)) \cdot |X'_i(u)| \right\} = T_u \{ \Phi(u) \}.$$

La T_u risulta così definita sul sottospazio $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_x)$ cui appartengono le $\varphi(x)$ soddisfacenti alle n condizioni:

$$\varphi(x_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ed è ivi lineare e continua. Si potrà allora prolungarla su tutto (\mathcal{D}_x) in una \bar{T}_u che risulterà definita a meno di una combinazione lineare di δ_{x-x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$).

Illustriamo la cosa nel caso di un $P_3(x)$ che abbia i suoi punti estremanti in $x = \xi_1, x = \xi_2$.

Poichè una $\varphi(x) \in (\mathcal{D}_x)$ può essere così scomposta:

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \chi(x),$$

ove

$$\lambda_i = \varphi(\xi_i); \quad \varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)$$

e quindi

$$\chi(x) \in (\mathcal{H}),$$

potremo porre:

$$\bar{T}_u \{ \varphi(x) \} = \sum_i \lambda_i \bar{T}_u \{ \varphi_i(x) \} + T_u \{ \chi(x) \}, \quad (i = 1, 2)$$

ove le $\bar{T}_u \{ \varphi_i(x) \}$ si sceglieranno arbitrariamente, salvo il caso già avvertito di cui all'oss. IV. Due determinazioni della \bar{T}_u differiranno allora per:

$$c_1 \delta_{x-\xi_1} + c_2 \delta_{x-\xi_2}.$$

Vogliamo ora accennare anche al caso in cui il polinomio $P_{n+1}(x)$ possiede qualche punto a tangente stazionaria il quale sia uno zero multiplo per la sua derivata. Ad illustrare la cosa ci riferiamo al caso particolarmente semplice in cui $u = (x - a)^3$, per il quale si nota appunto che per $x = a$ si annullano u' ed u'' .

Allora, se la T_x originaria è una misura, la T_u si può definire, attraverso la relazione $T_u \{ \varphi(x) \} = T_u \{ \varphi(a + \sqrt[3]{u^2})/3u^{2/3} \}$, come forma lineare continua

sul sottospazio $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_x)$ delle φ soddisfacenti alle condizioni:

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = 0,$$

che si può prolungare su tutto (\mathcal{D}_x) in una \bar{T}_u definita a meno di una combinazione lineare di δ_{x-a} , δ'_{x-a} .

In generale se la $u'(x)$ ha in $x = a$ uno zero di molteplicità P allora T_u si può definire sul sottospazio $(\mathcal{H}) \subset (\mathcal{D}_x)$ delle φ soddisfacenti alle condizioni:

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(p-1)}(a) = 0,$$

e si può prolungare in una T_u definita a meno di una combinazione lineare di δ_{x-a} , δ'_{x-a} , ..., $\delta^{(p-1)}_{x-a}$.

Le considerazioni precedenti si estendono ovviamente al caso in cui la T_x originaria sia una distribuzione di ordine $\leq m$.

Osservazione IV. — Tornando al caso della $u = x^2 - a^2$ osserviamo che se il punto $x = -a^2$ risulta esterno al supporto della T_x allora si può pensare che la formula (5) definisca la T_u indipendentemente da condizioni imposte sulle φ , anzi in tal caso la T_u si può definire come una distribuzione su (\mathcal{D}_x) anche se la T_x originaria era una distribuzione qualunque e non una misura come dapprima si era supposto.

Ciò si può vedere chiaramente in base al seguente:

Lemma. — Se il supporto di una T non ha punti comuni coll'intervallo aperto (a, b) e se φ_1 e φ_2 sono due funzioni $\in (\mathcal{D}_x)$ le quali differiscono solo in un intervallo interno ad (a, b) allora $T(\varphi_1) = T(\varphi_2)$.

Infatti si ha:

$$T(\varphi_1) - T(\varphi_2) = T(\varphi_1 - \varphi_2) = T(\psi),$$

ove $\psi \in (\mathcal{D}_x)$ ha il suo supporto interno ad (a, b) e quindi è tale che $T(\psi) = 0$, c. v. d.

Supponiamo ora che il punto $x = -a^2$ sia esterno al supporto della T_x . Partendo dalla (5) possiamo pensare di sostituire alla $\Phi(u)$ una funzione $\Omega(u)$ continua ed indefinitamente differenziabile, tale da annullarsi per $u = -a^2$ con tutte le sue derivate, la quale differisca dalla $\Phi(u)$ solo in un intorno destro I , del punto $u = -a^2$, tutto esterno al supporto della distribuzione $(^8)$. Risulterà allora definito il simbolo $T_u\{\Omega(u)\}$ indipendentemente dalla particolare $\Omega(u)$ prescelta. Se noi decidiamo di attribuire, per definizione, questo

(⁸) Che almeno una tale funzione $\Omega(u)$ esista si vede dal seguente esempio. Scelto $b > -a^2$ interno ad I , si ponga

$$\Omega(u) = 0 \quad \text{per } u \leq -a^2; \quad \Omega(u) = \Phi(u)\Lambda(u) \quad \text{per } b > u > -a^2$$

$$\Omega(u) = \Phi(u) \quad \text{per } u \geq b.$$

valore alla $T_u\{\Phi(u)\}$ allora anche questo simbolo risulterà univocamente determinato e quindi la T_u ne risulterà definita come forma lineare continua su tutto (\mathcal{D}_x) .

In conseguenza di ciò la \overline{T}_u converrà adesso sceglierla coincidente con T_u dappertutto.

Per questo noi al numero precedente abbiamo esplicitamente avvertito che il valore della $\overline{T}_u(\varphi_0)$ andava fissato arbitrariamente qualora il valore di $T_u(\varphi_0)$ non risultasse definibile dalla (5) in base ad una opportuna convenzione, quale può essere quella ora introdotta.

Poichè nel caso presente la $T_u(\varphi_0)$ risulta definita in base alla convenzione suddetta, allora sparisce ogni indeterminazione dalla definizione della \overline{T} data dalla (6), formula che adesso acquista la forma:

$$(6') \quad \overline{T}_u\{\varphi(x)\} = \lambda \overline{T}\{\varphi_0\} + T_u\{\chi\} = \lambda T_u\{\varphi_0\} + T_u\{\chi\}.$$

Si verifica poi facilmente che la \overline{T}_u così definita coincide colla T_u definita direttamente dalla (5) attraverso la convenzione adottata qualora si definisca colla stessa convenzione la $T_u\{\varphi_0\}$.

Analoghe considerazioni varranno nei casi contemplati nella oss. III qualora il supporto della T_x non contenga qualcuno dei punti $x = u_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

4. - 1) Come interessante esempio di applicazione dei concetti svolti interpretiamo nel nostro schema una formula molto nota in Meccanica ondulatoria ⁽⁹⁾:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2} a^{-1} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \}. \quad (a \neq 0).$$

Secondo l'ordine d'idee da noi prospettato si ha, ponendo $u = x^2 - a^2$:

$$\begin{aligned} \delta_{x^2-a^2}\{\varphi(x)\} &= \delta_u \left\{ \frac{\varphi(\sqrt{u+a^2}) + \varphi(-\sqrt{u+a^2})}{2\sqrt{u+a^2}} \right\} = \\ &= \frac{\varphi(a) + \varphi(-a)}{2a} = \frac{1}{2a} \{ \delta_{x-a}(\varphi) + \delta_{x+a}(\varphi) \}, \end{aligned}$$

Ove $A(u)$ è scelta in modo tale che:

$$A(-a^2) = A'(-a^2) = \dots = A^{(n)}(-a^2) = \dots = 0,$$

$$A(b) = 1, \quad A'(b) = A''(b) = \dots = A^{(n)}(b) = \dots = 0.$$

Una funzione A soddisfacente a tali condizioni è, per esempio:

$$A = \frac{1}{k} \int_{-a^2}^u \exp \left[-\frac{1}{u+a^2} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{u-b} \right] du; \quad \text{ove} \quad k = \int_{-a^2}^b \exp \left[-\frac{1}{u+a^2} + \frac{1}{u-b} \right] du.$$

⁽⁹⁾ Vedi P. A. M. DIRAC: op. cit., pag. 60, formula (9).

onde si potrà scrivere:

$$\delta_{x-a^2} = \frac{1}{2a} \{ \delta_{x-a} + \delta_{x+a} \}.$$

Qui non compare alcuna indeterminazione poichè δ_x ha il suo supporto costituito dal solo punto $x = 0$ che non contiene il punto $x = -a^2$, e ciò in accordo con quanto s'è detto all'oss. IV del n. 3.

2) Si può anche dare un significato al simbolo δ_{x^2} , significato che in generale non si può trarre dalla formula precedente per $a \rightarrow 0$.

In questo caso, in base alle considerazioni svolte nel n. 2, potremo scrivere, poichè il supporto di δ_x che è $x = 0$ coincide col punto $x = -a^2$ che è ora pure zero:

$$\delta_{x^2}(\varphi) = C\delta_x(\varphi) + \delta_{x^2}(\chi),$$

ove $\chi \in (\mathcal{H})$ è una funzione che si annulla nell'origine. Il valore di $\delta_{x^2}(\chi)$ sarà quindi dato da:

$$\begin{aligned} \delta_{x^2}(\chi) &= \delta_u \left\{ \frac{\chi^*(\sqrt{u}) + \chi^*(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\chi^*(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} - \frac{\chi^*(-\sqrt{u})}{-\sqrt{u}} \right\} = \frac{1}{2} (\chi'(0+) - \chi'(0-)) = 0, \end{aligned}$$

($\chi^*(\pm\sqrt{u})$ è nulla per $u < 0$ e coincide con $\chi(\pm\sqrt{u})$ per $u \geq 0$).

Valendo questo risultato per ogni $\varphi \in (\mathcal{D}_x^1)$ si può scrivere

$$\delta_{x^2} = C\delta_x.$$

In modo analogo si trova facilmente che:

$$\delta_{(x-a)^2} = C\delta_{x-a}.$$

3) Illustriamo ora un'altra formula classica nella Meccanica ondulatoria.

Se $u = P(x)$ è un polinomio a zeri tutti semplici, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e se la $P'(x)$ ha pure zeri tutti semplici, potremo scrivere, in base alla (8):

$$\delta_P(\varphi(x)) = \delta_u \left\{ \sum_i \varphi^*(X_i(u)) \cdot |X'_i(u)| \right\},$$

ove i simboli hanno il noto significato. Di qui si deduce facilmente:

$$\delta_P \{ \varphi(x) \} = \sum_i \varphi^*(X_i(0)) \cdot |X'_i(0)| = \sum_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{|P'(\alpha_i)|} = \sum_i \frac{1}{|P'(\alpha_i)|} \delta_{x-\alpha_i} \{ \varphi(x) \},$$

onde in definitiva avremo:

$$\delta_{P(x)} = \sum_i \frac{\delta_{x-\alpha_i}}{|P'(\alpha_i)|}.$$

4) Un'altra interessante relazione che il nostro schema permette di interpretare è la seguente: se $u = P(x)$ è il polinomio anzidetto vale la formula

$$u\delta_u = 0.$$

Infatti colle solite formule si ha ⁽¹⁰⁾:

$$u\delta_u\{\varphi(x)\} = u\delta_u\{\sum \varphi^*(X_i(u)) \cdot |X'_i(u)|\} = \delta_u\{u \cdot \sum \varphi^* \cdot |X'_i|\} = 0.$$

5) Vogliamo infine occuparci del caso in cui la $u = P(x)$ presenti anche qualche zero multiplo. Sia, ad esempio,

$$u = P(x) = (x+1)^2(x-1).$$

Le ordinate dei punti estremanti sono $u_1 = 0$ per $x_1 = -1$, e $u_2 = -32/27$ per $x_2 = 1/3$. Il supporto di δ_x è al solito $x = 0$, a cui appartiene $x = u_1$, ma non $x = u_2$. Nella espressione della δ_u comparirà perciò solo l'indeterminazione relativa al primo punto estremante. Data una $\varphi \in (\mathcal{D}_x^1)$ possiamo porre:

$$\varphi(x) = \lambda\varphi_0(x) + \chi(x),$$

ove

$$\lambda = \varphi(-1); \quad \varphi_0(-1) = 1; \quad \varphi_0(1) = 0; \quad \chi(-1) = 0,$$

e quindi

$$\delta_u\{\varphi\} = \delta_u\{\chi\} + O\delta_{x+1}\{\varphi\}.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned} \delta_u\{\chi\} &= \delta_u\left\{\sum_{i=1}^3 \chi^*(X_i(u)) \cdot |X'_i(u)|\right\} = \delta_u\left\{\frac{\chi^*(X_1)}{|P'(X_1)|} + \frac{\chi^*(X_2)}{|P'(X_2)|} + \frac{\chi^*(X_3)}{|P'(X_3)|}\right\} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0-} \left\{\frac{\chi(X_1)}{P'(X_1)} - \frac{\chi(X_2)}{P'(X_2)}\right\} + \frac{\chi(1)}{4} = \lim_{u \rightarrow 0-} \left\{\frac{\chi'(X_1) \cdot X'_1(u)}{P''(X_1) \cdot X'_1(u)} - \frac{\chi'(X_2) \cdot X'_2(u)}{P''(X_2) \cdot X'_2(u)}\right\} + \frac{\varphi(1)}{4} = \\ &= \frac{\chi'(-1-) - \chi'(-1+)}{P''(-1)} + \frac{\varphi(1)}{4} = \frac{\varphi(1)}{4}. \end{aligned}$$

e quindi in definitiva

$$\delta_u = \frac{1}{4} \delta_{x-1} + O\delta_{x+1}.$$

⁽¹⁰⁾ Per il prodotto vedi L. S. vol. I pag. 115.

SUMMARY

The principal aim of this work consists in the study of the variables transformation problem in the frame of Schwartz's distribution theory. In particular several formulae concerning Dirac's « singular » functions, frequently used in quantum-theory, are proved.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Visualizzazione delle onde di viscosità nei liquidi.

A. CARRÉLLI e G. BRANCA

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 3 Ottobre 1951)

Lo spostamento s delle onde di viscosità che si possono generare in un liquido, in direzione normale alla direzione di propagazione y è dato dalla relazione seguente:

$$(1) \quad s = s_0 \exp [-\delta y] \cos 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right),$$

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2\eta}{2\pi\nu\mu}}, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

e la velocità dei vari strati normali, per effetto di tali onde, è data da

$$(2) \quad v = v_0 \exp [-\delta y] \sin 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right).$$

Queste onde di viscosità sono state studiate dal MASON con un metodo indiretto. Noi abbiamo realizzato un dispositivo che permette una visualizzazione diretta di esse, facendo ricorso al fenomeno della doppia rifrazione accidentale nei liquidi, e più particolarmente in soluzioni colloidali in movimento. Si è scelto come liquido una soluzione alcoolica colloidale di ferro Bravais in acqua. Fra due nicol a 45° viene disposto un compensatore di Babinet con frange orizzontali. Prima del compensatore è situata

una vaschetta contenente il liquido in esame: nella parte centrale di essa è immersa una lamina piana, parallela alla direzione di propagazione del fascio luminoso. Questa lamina è connessa con il rebbio di un diapason, frequenza 38 Hz.

Ponendo il diapason in oscillazione, la lamina, e quindi lo strato di liquido immediatamente aderente ad essa, compie un moto armonico e dalla lamina si propaga nella massa liquida in direzione normale un'onda di viscosità con velocità data dalla (2). Il liquido adoperato presenta doppia rifrazione accidentale per movimento: il valore della doppia rifrazione, e quindi lo spostamento che deve riscontrarsi nelle frange del compensatore di Babinet è proporzionale al valore assoluto della velocità. In uno strato a distanza y dalla lamina si potrà osservare una doppia rifrazione proporzionale al valore medio della velocità, che è dato da

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi} v_0 \exp [-\delta y].$$

Si ricava da questa relazione dunque che la doppia rifrazione, e di conseguenza lo spostamento z delle frange dalla linea orizzontale (diapason e quindi lamina in

riposo) deve soddisfare a una relazione del tipo

$$z = K \exp [-\delta y].$$

In fig. 1 è riportato il risultato otte-

quindi $\lambda = 5,7 \cdot 10^{-1}$ cm. In fig. 2 è riportato l'andamento delle frange. La vaschetta adoperata non è molto grande e per effetto del moto della lamina si genera un movimento in tutta la massa liquida. È chiaramente osservabile questo

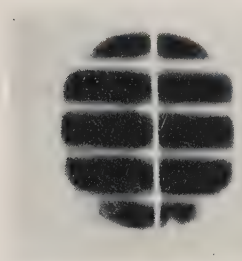


Fig. 1 a.



Fig. 1 b.

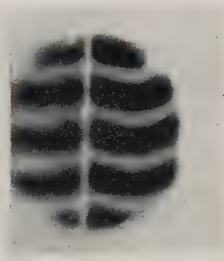


Fig. 2.

nuto nel caso della menzionata soluzione. Per essa, con la frequenza utilizzata di 38 Hz si ha $\lambda = 5,7 \cdot 10^{-2}$ cm. Passando ad un liquido più viscoso λ deve crescere: si è quindi adoperato una soluzione alcoolica colloidale di ferro Bravais in glicerina; questa volta $\eta = 1,245$ e

effetto nella fotografia dove nelle immediate vicinanze della lamina le frange sono incurvate vieppiù per l'aumentato valore di λ ma lo sono anche al di là della zona interessata all'onda di viscosità e ciò appunto a causa della formazione di vortici.

Velocità di migrazione degli elettroni in campo elettrico in Argon.

L. COLLI e U. FACCHINI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 9 Ottobre 1951)

A causa delle discordanze esistenti fra i valori finora dati per la velocità di migrazione degli elettroni in Argon, abbiamo ripreso questa misura, ponendo particolare cura nella purezza dell'Argon ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾.

Il metodo che abbiamo usato, simile a quello descritto da ROSSI e ALLEN, consiste nell'osservazione del tempo di salita di impulsi dati da particelle α in una camera di ionizzazione a elettrodi piani.

La nostra camera di ionizzazione porta su un elettrodo un collimatore contenente un preparato di Polonio che fornisce un fascio di particelle α parallele agli elettrodi. Resta così ben definita la distanza fra l'asse del fascio di particelle e il collettore.

Gli impulsi ottenuti vengono osservati con un oscillografo a traccia comandata; come è noto, il tempo di salita dell'impulso di una particella α in queste condizioni è uguale al tempo di transito degli elettroni nella camera.

Le misure consistono nell'osservazione di tali tempi in funzione di E/p ($E =$

= campo elettrico; p = pressione del gas nella camera).

La purificazione dell'Argon è ottenuta per mezzo della circolazione del gas su lega di Calcio-Magnesio. Questo avviene in un forno connesso alla camera, nel quale sono posti recipienti di ferro Armco contenenti la lega truciolata. Il riscaldamento viene fatto con un elemento a resistenza.

La lega è stata preparata con Calcio e Magnesio accuratamente distillati nel vuoto. Anche la fusione viene fatta nel vuoto; la lega viene poi tenuta protetta dall'aria il più possibile e prima dell'uso è conveniente degasarla accuratamente.

I valori della velocità di migrazione trovati con la presente misura nel caso dell'Argon sono disegnati in fig. 1.

Questi valori si ottengono usando Argon di differenti provenienze e purezze iniziali (98-99%) dopo una circolazione a 450 °C di circa 3 ore; le più probabili impurezze contenute nell'Argon risultavano essere N_2 , O_2 , H_2O , CO_2 , H_2 .

Per controllare l'efficienza del metodo di purificazione abbiamo aggiunto all'Argon purificato quantità note di questo gas in percentuali varianti dallo 0,1 al 10%. Come è stato dimostrato da ROSSI e ALLEN, impurezze molecolari nell'Argon hanno l'effetto di aumentare la velocità

⁽¹⁾ J. ALLEN e B. ROSSI: *M.D.D.C.*, 448 (1944).

⁽²⁾ E. D. KLEMA e J. ALLEN: *Phys. Rev.*, 77, 661 (1950).

⁽³⁾ R. A. NIELSEN: *Phys. Rev.*, 50, 950 (1936).

di migrazione degli elettroni. Questo effetto è stato constatato in tutti i casi sopra citati.

Dopo una circolazione di qualche ora a 450 °C, la curva della velocità di migrazione in funzione di E/p è ritornata

essere spiegato con la presenza di piccole frazioni di impurezze contenute nell'Argon da loro usato, come sembra plausibile osservando la grande criticità dei valori delle velocità di migrazione, risultata dalle nostre misure sulle miscele

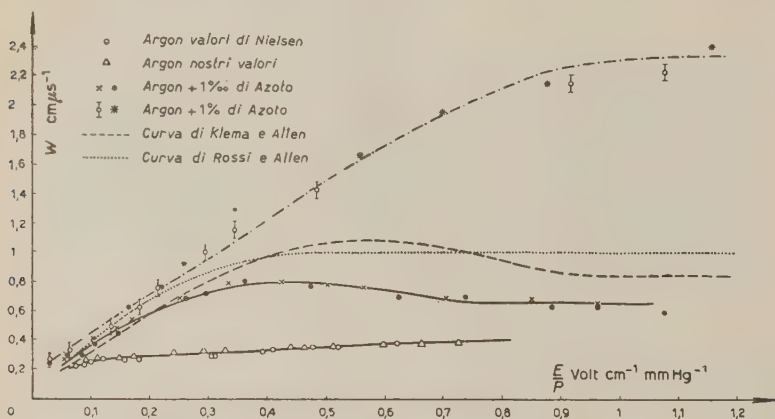


Fig. 1.

a coincidere con i valori corrispondenti all'Argon puro. Ciò indica che le impurezze sono completamente assorbite dalla lega Ca-Mg. Con maggior precisione sono state fatte misure quantitative per miscele di Argon più 1% e 0,1% di Azoto, che sono rappresentate in fig. 1.

I nostri risultati in Argon sono d'accordo con quelli di NIELSEN e in disaccordo con quelli di ROSSI e ALLEN e di KLEMA e ALLEN. Il disaccordo fra i valori di questi Autori ed i nostri può

Argon-Azoto. Le misure di NIELSEN sembrano essere state condotte nelle migliori condizioni di purezza. Il fatto che i nostri valori e quelli di NIELSEN siano i più bassi è in accordo con l'ipotesi della maggior purezza del gas. Dai nostri risultati sulle miscele Argon-Azoto si può proporre la misura della velocità di migrazione degli elettroni come metodo di controllo della purezza dell'Argon, essendo rivelabili percentuali di gas molecolari inferiori all'1 ‰.

Studio del livello a 8,20 MeV del C^{13} .

R. RICAMO (*)

Istituto di Fisica del Politecnico - Zurigo

(ricevuto il 10 Ottobre 1951)

Bombardando il C^{12} con neutroni, si formò il nucleo C^{13} eccitato con almeno 4,86 MeV (energia di legame dell'ultimo neutrone). Essendo trascurabili per il C^{12} urti con neutroni veloci diversi dal tipo elastico, è possibile studiare i livelli del C^{13} , per energie di eccitazione maggiori di 4,86 MeV, mediante esperienze di trasmissione e misure di distribuzione angolare dei neutroni diffusi dal C^{12} . Si vuol qui esporre brevemente uno studio sul livello a 8,20 MeV ($= 4,86 \text{ MeV} + 3,62 \cdot 12/13$) del C^{13} per il quale è già stato reso noto ⁽¹⁾ che la distribuzione angolare dei neutroni diffusi presenta una forte anisotropia.

La curva a tratto pieno di fig. 1 rappresenta l'andamento della sezione d'urto totale σ per il C^{12} in funzione dell'energia E_n dei neutroni secondo le più recenti misure ⁽²⁾. La curva tratteggiata e quella punteggiata ad essa sovrapposte sono state ottenute calcolando σ_{elastico} secondo la teoria di Breit e Wigner con i perfezionamenti portati da altri Autori ⁽³⁾:

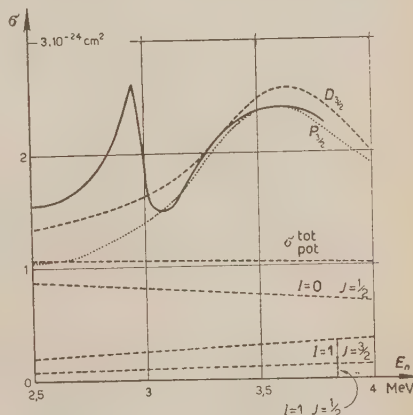


Fig. 1.

$$(1) \quad \sigma_{\text{el}} = \pi \lambda^2 \sum_l \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \left| \exp[-2i\xi_l] - 1 + \frac{i}{a + i/2} \right|^2.$$

Il fattore statistico degli spin si riduce, nel caso del C^{12} per i neutroni ($i=0$; $s=1/2$) a $J+1/2$, essendo J il momento angolare totale del C^{13} . Nel termine corrispondente alla risonanza si è posto per brevità $(E_n - E_0)/\Gamma = a$, essendo

(*) Dell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna.

(1) E. BALDINGER, P. RUBER, R. RICAMO e W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 503 (1950).(2) R. RICAMO e W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 419 (1951).(3) H. FESHBACH, D. C. PEASLEE e V. F. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **71**, 145 (1947).

E_0 l'energia dei neutroni per la risonanza nominale. Si è inoltre indicato con ξ_l la fase dell'onda parziale d'ordine l diffratta per effetto del così detto « potential scattering ». La curva tratteggiata è stata calcolata nell'ipotesi che si tratti di un livello $D_{3/2}$ (con $E_0 = 3,65$, $\Gamma = 0,90$ MeV); quella punteggiata per un livello $P_{3/2}$ (con $E_0 = 3,43$, $\Gamma = 0,93$ MeV). In fig. 1 sono anche rappresentati i valori di σ_{pot} per $l=0$ ed $l=1$, assumendo per il raggio classico nucleare il valore $r = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Nel nostro caso σ_{pot} è trascurabile per $l=2$.

Secondo la (1) σ_{e1} può assumere il valore massimo

$$(2) \quad \sigma_{\text{max}} = (J + 1/2)4\pi\hbar^2 + \sum \sigma_{\text{pot}}^*,$$

dove σ_{pot}^* è il « potential scattering » calcolato per coppie di valori J, l diverse da quella che caratterizza il livello considerato. Nella tabella seguente sono dati i valori di σ_{max} nei vari casi.

livello	$S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$	$D_{3/2}$	$D_{5/2}$	$F_{5/2}$
σ_{max}	1,09	1,70	2,39	2,59	3,37	$3,37 \cdot 10^{-24}$ cm ²

Il valore massimo misurato di σ è $2,40 \cdot 10^{-24}$ cm² e ad esso sono prossimi solo i valori calcolati per i livelli $P_{3/2}$ e $D_{3/2}$. Ciò permette di affermare che al livello

considerato compete momento angolare totale $J=3/2$ mentre resta incerto il valore di l .

Per individuare il momento orbitale si è determinata la distribuzione angolare dei neutroni diffusi da un anello di grafite. I neutroni monocromatici vengono ottenuti mediante la reazione D, D con targhetta di ghiaccio pesante di potere frenante 80 keV. L'anello è disposto in un piano normale alla direzione z dei

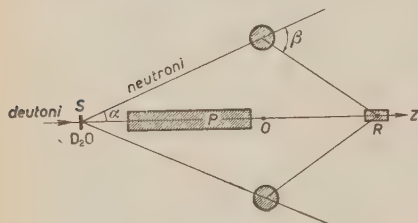


Fig. 2.

deuteroni e con il centro O su z (fig. 2). Ogni elemento dell'anello viene quindi investito da neutroni della medesima energia E_n funzione dell'angolo α e dell'energia E_D dei deuteroni.

Un rivelatore di neutroni costituito da un cristallo di antracene e fotomoltiplicatore, è disposto con il centro R del cristallo sull'asse z . Tra la sorgente e il cristallo di antracene è interposto permanentemente un diffusore di polivinile P con fattore di trasmissione 2 %.

I neutroni diffusi dall'anello giungono al rivelatore formando con la direzione primitiva un angolo β dipendente dalla geometria dell'esperienza. Le misure vengono eseguite con vari anelli di grafite di diametro medio da 18 a 37 cm e la cui sezione normale è un cerchio di diametro 2,7 oppure 3,6 cm. In ogni caso si sceglie E_D in modo che E_n abbia sempre il valore 3,62 MeV. Variando la distanza RO , β può assumere i valori compresi tra 26 e 133°.

L'intensità $N(\beta)$ dei neutroni diffusi secondo un determinato angolo β nel sistema di riferimento del laboratorio viene misurata come differenza tra il numero di neutroni registrato con l'anello in posizione e quello in assenza dell'anello, divisa per l'angolo solido sotto il quale il rivelatore è visto da un elemento dell'anello.

Una esperienza preliminare ha mostrato che la sensibilità del rivelatore è praticamente indipendente dalla direzione secondo la quale i neutroni incidono su di esso.

La curva a tratto pieno di fig. 3 rappresenta l'intensità $N(\theta)$ dei neutroni diffusi nel sistema di riferimento fisso rispetto al baricentro e opportunamente normalizzata. $N(\theta)$ è stata calcolata dai valori misurati per $N(\beta)$ facendo uso delle note relazioni tra θ e β e tra gli angoli solidi nei due sistemi di riferimento. La curva rappresenta il valore medio di 20 serie di misure e gli errori indicati sono gli scarti quadratici medi di una singola serie di misure; nessuna correzione è stata introdotta per la diffusione multipla o per la geometria non ideale.

Poichè $N(\theta)$ è proporzionale alla sezione d'urto differenziale $\sigma(\theta)$, si vuole ora confrontare l'andamento di $N(\theta)$ dedotto dall'esperienza con quelli di $\sigma(\theta)$ calcolabili dall'espressione generale data da BLOCH ⁽⁴⁾ per il caso di un livello isolato. Per un livello $D_{3/2}$ si è calcolato

$$(3) \quad \sigma(\theta)/\lambda^2 = 0,08 + 0,57 \cos \theta + 9,60 \cos^2 \theta + 2,20 \cos^3 \theta,$$

e per un livello $P_{3/2}$

$$(4) \quad \sigma(\theta)/\lambda^2 = 1,90 + 3,27 \cos \theta + 2,66 \cos^2 \theta.$$

Le due funzioni sono rappresentate in fig. 3, la prima dalla curva tratteggiata, la seconda da quella punteggiata.

Nel calcolo si è supposto, che ξ_l non dipenda dall'orientazione degli spin, sia cioè funzione solo di l . Si è supposto inoltre che i termini $D_{3/2}$ e $P_{1/2}$ dei doppietti corrispondenti ad $l = 2$ ed $l = 1$ siano molto distanti dai rispettivi compagni $D_{3/2}$ e $P_{3/2}$. Per il «potential scattering» si sono fatte le medesime ipotesi seguite per il calcolo della sezione d'urto elastico.

Il confronto delle curve teoriche con quella sperimentale porta a concludere che il livello analizzato è del tipo $D_{3/2}$. Le discrepanze rilevabili sono probabilmente in parte attribuibili al fatto che la teoria usata non tiene conto dell'interferenza tra i livelli vicini e in parte al non aver corretto i risultati sperimentali per l'effetto della diffusione multipla che, se presente, si fa particolarmente sentire per $\theta = 90^\circ$.

Ringrazio il prof. P. SCHERRER e il prof. V. F. WEISSKOPF per l'interessamento portato a questo lavoro e in modo particolare il prof. M. VERDE e il dott. W. ZÜNTI per le proficue discussioni.

⁽⁴⁾ F. BLOCH: *Phys. Rev.*, **58**, 829 (1940).

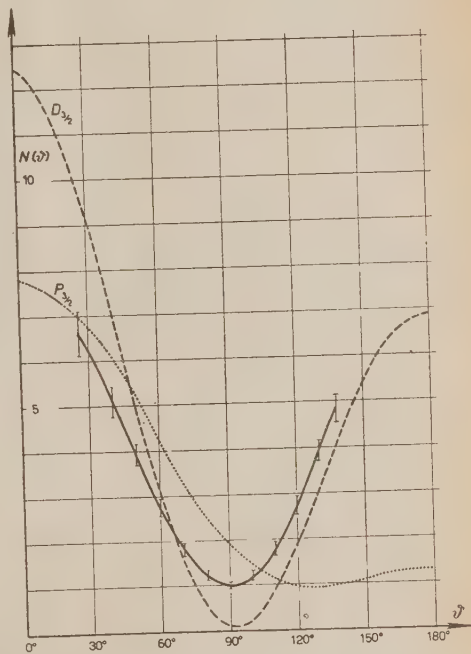


Fig. 3.

Eliminazione della contrazione nelle emulsioni nucleari.

G. MIGNONE

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 16 Ottobre 1951)

La nuova tecnica dell'incisione di fili o tubi capillari in emulsioni piane e la sua estensione a emulsioni cilindri-

guenza della contrazione dello strato di gelatina dopo il fissaggio.

Era stato osservato che gli spessori

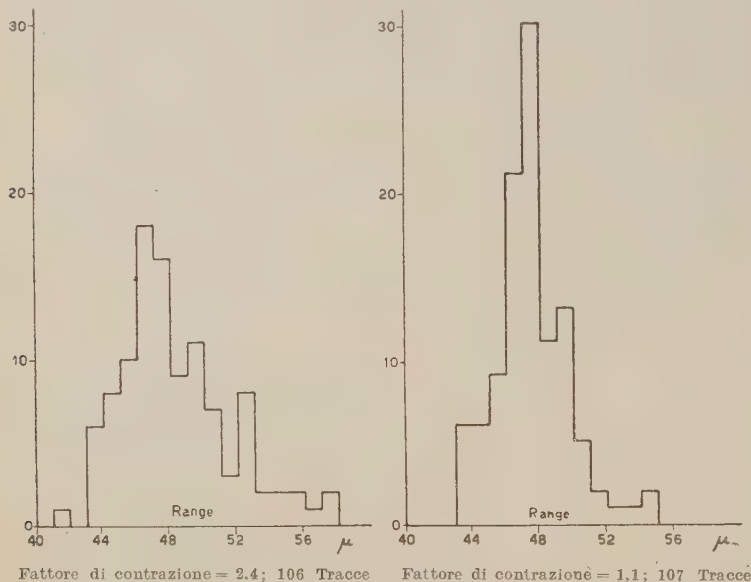


Fig. 1 - Eliminazione della contrazione delle emulsioni impregnate con glicerina.
Range di particelle α del ThC'

che ⁽¹⁾ ⁽²⁾, che rende possibile di lavorare con qualunque forma di emulsione, presuppone che siano eliminate le distorsioni generali e locali, che sono la conse-

gnali di emulsioni asciugate dopo una immersione in una soluzione di qualche per cento di glicerina (allo scopo di diminuire le tensioni interne ⁽³⁾) presen-

tano un fattore di contrazione (rapporto tra i volumi della emulsione prima e dopo il processo) minore del normale: abbiamo condotto perciò una serie di prove per constatare se era possibile introdurre nell'interno dell'emulsione glicerina in quantità tale da annullare la contrazione (4).

Lo spessore finale dell'emulsione dipende principalmente dalla concentrazione, dalla durata e dalla temperatura della soluzione di glicerina; in minor misura dipende dai trattamenti subiti in precedenza. In emulsioni di 200μ di spessore abbiamo trovato conveniente, con una temperatura superiore a 20°C , una concentrazione del 10% e una durata di 6 ore con lieve agitazione; a temperature inferiori occorre aumentare la concentrazione, eventualmente in modo graduale.

La glicerina presenta l'inconveniente di possedere un indice di rifrazione alquanto inferiore a quello della gelatina; ma ha il vantaggio di impedire l'indurimento della gelatina e di permettere successive immersioni a concentrazioni differenti fino ad ottenere lo spessore desiderato.

Un risultato tipico è rappresentato dalla fig. 1, dove il valore del fattore di contrazione per differenti concentrazioni è ottenuto per mezzo della misura della proiezione verticale e orizzontale delle tracce di particelle α del ThC' , secondo il metodo indicato da VIGNERON (5).

Abbiamo eseguito misure di lunghezza di particelle di percorso definito e di conteggio di grani di elettroni lenti. La fig. 2 mostra i risultati di misure di lunghezza su particelle α . L'eliminazione della contrazione ha in generale per risultato di aumentare la precisione delle misure.

• Campi di applicazione immediata, oltre che le tecniche dei fili e tubi e delle emulsioni cilindriche, sono misure di densità di grani, di gap, e di scattering col metodo della sagitta verticale (6), che,

una volta eliminata la contrazione, si presenta come particolarmente vantaggioso in misure di energia di particelle di velocità moderata.

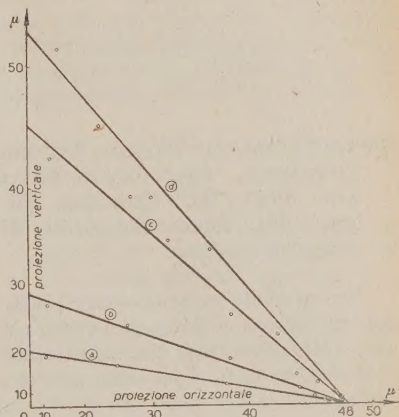


Fig. 2. - Eliminazione della contrazione delle emulsioni impregnate con gelatina.

Range di particelle α del ThC'

a) 0 %	Fattore di contrazione = 2,4
b) 5 %	" " = 1,7
c) 9 %	" " = 1,1
d) 11 %	" " = 0,9

Ringrazio il dott. BONETTI che ha seguito il lavoro, e i dott. CONZI e MORA (*), per l'aiuto prestato nelle misure.

(1) G. MEULEMANS, G. P. S. OCCHIALINI e A. M. VINCENT: *Nuovo Cimento*, **8**, 341 (1951).

(2) A. BONETTI e G. P. S. OCCHIALINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 725 (1951).

(3) *Ilford Bulletin*, n. 47a.

(4) Un altro metodo, che sembra presentare alcuni vantaggi su quello della glicerina, è quello recentemente descritto da M. DANYSZ e G. YEKUTIEL: *Phyl. Mag.*, **42**, 1185 (1951).

(5) L. VIGNERON: *Journ. Phys.*, **10**, 305 (1949).

(6) C. MABBOUX: *Compt. Rend.*, **232**, 1901 (1951).

(*) In permesso dall'Istituto Fisico dell'Università di Pavia.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA, SEZIONE
LOMBARDA - *Conferenze di Fisica
anno 1950*. Ed. Viscontea, Mi-
lano, 1951, volume litografato, di
IV + 399 pagine.

Per cura della Sezione Lombarda della Società Italiana di Fisica, si è svolto nel 1950 a Milano un Corso di aggiornamento in Fisica, dedicato soprattutto (ma non esclusivamente) ai professori di scuola media.

Il presente volume raccoglie, in veste tipograficamente dignitosa, il testo della maggior parte delle lezioni tenute in tale occasione da esimii docenti di varie Università italiane. Della maggior parte, perchè la paziente tenacia dei raccoglitori non fu sufficiente a strappare dalle mani di alcuni illustri Conferenzieri un qualsiasi resoconto scritto delle loro lezioni.

Dobbiamo essere veramente grati alla Sezione Lombarda della S.I.F. sia per l'utilissima iniziativa del Corso che, già ripetuto nel '51 a Milano, auguriamo venga nel '52 esteso su scala nazionale, sia per questo volume, che vorremmo ampiamente divulgato e letto attentamente da tutti i professori di scuola media.

Il volume inizia con una prolusione di G. POLVANI dal titolo: « L'uomo dinanzi alla natura »: un'ampia inquadratura storica che indaga le vie del progressivo evolversi delle idee generali sulla conoscenza fisica.

Seguono i testi di sedici conferenze sui più svariati argomenti, susseguentisi senza preoccupazione d'unità o d'ordine.

Gli argomenti trattati sono: « Le particelle elementari » e « La struttura del nucleo » (E. AMALDI); « La pila atomica » (C. SALVETTI); « Meccanica atomica » (P. CALDIROLA); « Applicazione delle lastre fotografiche nelle ricerche di fisica nucleare » (A. ROSTAGNI); « Aspetti recenti della indagine ionosferica » (G. TODESCO); « Propagazione anomala delle onde » (O. SPECCHIA); « Spettroscopia ad elevato potere risolutivo » (L. GIULOTTO); « Scariche nei gas » (G. VALLE); « Contatori e camere di ionizzazione » (A. LOVATI); « Il metodo della camera di Wilson » (A. MURA); « Elettronica per fisica nucleare » (G. TAGLIAFERRI); « Misure di intensità e di dose di radiazione » (L. TERRA); « L'elettrone » (A. BORSELLINO); « Radioattività » (S. GALLONE); « La radiazione cosmica e la sua origine » (G. WATAGHIN).

Diciamo subito che non nuoce affatto al volume questa mescolanza di classico e di moderno, di questioni fondamentali e di esposizioni tecniche, di inquadrature generali e di argomenti particolari. È nostra opinione ch'essa rifletta fedelmente ciò che è oggi la fisica, in cui la parte classica costituisce il fondamento non sopprimibile nè dimenticabile della ricerca attuale, le idee generali sono la guida necessaria anche per la più particolare delle ricerche, il mezzo tecnico e la scoperta fondamentale sono così intimamente e indissolubilmente associati.

Vi sono viceversa delle notevoli differenze nel « tono » delle varie lezioni. Mentre le conferenze sugli argomenti più generali sono, nel loro carattere informativo panoramico, in genere perfettamente adeguate al livello e allo scopo del Corso,

altre, su argomenti più particolari, sono o troppo tecniche o addirittura embrionali.

Mentre alcune avrebbero tratto indiscutibile vantaggio da un'audace opera di sfrondamento, che sopprimesse ripetizioni e lungaggini, per altre di gran lunga troppo sommarie non è stato praticamente affrontato il lavoro di traduzione del loro argomento in termini accettabili per una lezione-conferenza. Si direbbe quasi che alcuni dei più giovani Conferenzieri non abbiano voluto piegarsi all'utilissima disciplina di ripensare e trattare l'argomento in cui sono maestri, in una forma logicamente e didatticamente coerente.

Vi sono inoltre in qua e in là nel volume alcune leggerezze di espressione, che una revisione più accurata dei manoscritti da parte degli Autori avrebbe facilmente evitato. Così alla pag. 37 la vita media dell'elettrone negativo è detta «praticamente infinita»; alla pag. 39 si dimentica che la dematerializzazione di due elettroni, positivo e negativo, dà luogo più frequentemente non ad uno ma a due quanti α ; alla pag. 44 è spiegata a tirar via, in modo che risulta erroneo, la relativa figura;... alla pag. 300 si parla di «trasformazioni di energia in materia e in carica»; alle pagg. 335-336 è per lo meno assai confusa e mal giustificata la distinzione tra flusso di una radiazione e dose/s; alla pag. 374 si afferma che il neutrino è «inosservabile» senza quel «praticamente» che salva dagli equivoci, ecc. ecc.

Nè manca qualche errore di fatto, come là dove (pag. 81) si attribuisce a JOLIO-CURIE la scoperta della radioattività artificiale, scoperta ch'è notoriamente dovuta a FERMI, mentre i due JOLIO hanno trovato quella provocata da particelle α .

Tutto ciò non toglie che il volume sia, nel suo complesso, assai utile. I rilievi da noi fatti sono soprattutto suggeriti dal desiderio di veder presto apparire in un volume, che rappresenti un

ulteriore progresso, anche le conferenze del '51. Vorremmo inoltre che questa lodevolissima iniziativa della Sezione Lombarda della nostra Società, tendente a riportare i professori di scuola media a contatto con l'Università e la ricerca, non rimanesse isolata, ma desse presto vita a quel Corso nazionale annuale di aggiornamento ch'è nei voti di tutti.

M. AGENO

H. A. BAUER - *Grundlagen der Atomphysik*. 4^a edizione. Springer Verlag, Wien, VIII-631 pp. 1951.

Die Grundlagen der Atomphysik è un libro scritto con doppio intento: prima di tutto per dare in mano a chi ha già una certa conoscenza della fisica un testo con cui potersi accostare alla fisica teorica, in secondo luogo per mostrare, a chi ha già ben chiare le idee sui vari punti che esso tratta, quale sia stato lo sviluppo storico della teoria attraverso i raffinamenti via via introdotti.

Esso fa infatti ripercorrere al lettore, partendo dalle esperienze più elementari, lo stesso cammino seguito dai fisici per dare alla fisica teorica il suo attuale assetto.

Si comincia così dai primi capitoli, dedicati alle particelle elementari, soffermandosi particolarmente sui metodi con cui si sono misurate le grandezze fondamentali: le cariche e le masse. Il passo successivo è costituito dall'introduzione dei fotoni e dei fenomeni ad essi legati dell'effetto Compton e della materializzazione. Per completare il quadro delle particelle elementari si accenna ai mesoni e alla scoperta di questi nella radiazione cosmica.

Esaminati in tal modo i materiali da costruzione, si procede all'edificazione della materia. Si ha così il capitolo sulle trasmutazioni nucleari che per l'abbondanza di esempi e di dati è prezioso.

Alla parte di fisica nucleare sono ag-

gregate una ventina di pagine sulle macchine acceleratrici con la teoria elementare del betatrone. Successivamente sono trattati a fondo il modello atomico di Bohr e l'ottica ondulatoria dei raggi X come introduzione alle proprietà ondulatorie dell'elettrone. Prendendo le mosse dall'esperienza di Davisson e Germer, introdotta la relazione di de Broglie, viene svolta, in una estesa parte del libro, la meccanica ondulatoria di Schrödinger con le varie applicazioni, tra cui la teoria delle perturbazioni e il metodo W.K.B.

Segue la meccanica relativistica dell'elettrone anch'essa illustrata da applicazioni e quindi, da ultimo, il capitolo sulle statistiche quantiche.

Il pregio più importante del libro è probabilmente la dovizia di tabelle numeriche, fotografie, figure esplicative di esperienze e di fenomeni, che aiutano grandemente nello studio e sono indispensabili nella pratica.

Un secondo importante pregio è da

ricercarsi nei vari calcoli che illustrano, in specie, le applicazioni della meccanica dell'elettrone; tali calcoli sono portati fino in fondo con chiari passaggi analitici, come del resto rientrava negli intendimenti espressi dall'Autore: « non multa sed multum ».

Si può quindi ritenere che il libro raggiunga, nel suo complesso, lo scopo di dare agli studenti dell'Università di Vienna e della Technische Hochschule un efficiente testo di Fisica teorica e rappresenti contemporaneamente un utile strumento di lavoro per chi ha già lasciato gli studi universitari.

Completano il volume una lista di testi divisa per argomenti, un indice dei nomi citati ed un indice per argomenti, contenente, accanto alla relativa voce, il valore numerico aggiornato al 1949 di tutte le principali costanti fisiche e di alcune grandezze atomiche e nucleari di frequente uso.

G. CORTELLESA

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA